



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사학위논문

원통형 조사창에서의
양끝내포선 길이분포를 이용한
절리크기분포 추정 연구

2016년 8월

서울대학교 대학원

에너지시스템공학부

서 가 현

원통형 조사창에서의
양끝내포선 길이분포를 이용한
절리크기분포 추정 연구

지도교수 송 재 준

이 논문을 공학석사 학위논문으로 제출함

2016년 6월

서울대학교 대학원

에너지시스템공학부

서 가 현

서가현의 공학석사 학위논문을 인준함

2016년 7월

위 원 장 전 석 원

부 위 원 장 송 재 준

위 원 민 기 복



요약 (국문초록)

본 연구에서는 3차원 원통형 조사창에서의 양끝내포선 길이 분포를 이용하여 절리 직경 분포 추정을 수행하였다. 기존연구의 추정원리를 토대로 하여, 양끝내포선을 만드는 절리원판의 중심점이 놓이는 영역(JCV)을 적절히 정의하면 조사창의 형상과는 상관없이 임의의 조사창에 대하여 적용할 수 있기 때문에 해당 추정법을 원통형 조사창에 적용하였다. 추정법의 검증을 위하여 몬테-카를로 시뮬레이션을 통해 가상의 절리 분포를 발생시키고 모분포와 추정분포를 비교하였다. 더 나아가 추정 결과의 수치적인 오차를 줄이기 위하여, 보조변수를 도입한 개선된 방안을 제시하였다. 모분포로서 정규분포를 사용한 결과 보조변수의 변화에 따라 추정 분포의 진동이 줄어들어 오차가 크게 감소한 것을 확인하였다. 또한 오차의 변화를 분석함으로써, 추정에 사용된 각각의 변수가 추정 결과에 어떻게 영향을 미치는지 살펴보았다. 추가적으로 절리 직경의 최적 분포 및 적절한 보조변수 값을 찾기 위한 가이드라인을 제안하였다. 즉 시행착오법을 통하여 오차가 낮은 적정 추정 구간을 찾을 수 있으며, 이로써 기존의 방법보다 오차가 훨씬 감소한, 실제 모분포와 가까운 직경분포를 추정할 수 있었다.

주요어 : 절리크기분포, 원통형 조사창, 양끝내포선, 프레드홀름 제1종 적분방정식, 몬테-카를로 시뮬레이션

학 번 : 2012 - 21002

목 차

1. 서론	1
2. 기존연구의 배경이론	3
2.1 추정 원리	3
2.2 결과의 검증	5
2.3 응용	6
3. 연구 방법	7
3.1 계산 영역	7
3.2 절리선 길이의 계산	8
3.3 Joint center volume의 계산	12
3.4 추정오차를 줄이기 위한 수치적 해법 이용	14
3.5 추정결과의 검증 방법	18
4. 결과 및 고찰	19
4.1 계산 조건	19
4.2 JCV 행렬	21
4.3 양끝내포선의 개수에 따른 오차 변화	24
4.4 γ 값의 변화에 따른 오차 변화	25

4.5 I (절리선 길이의 구간의 개수)에 따른 오차 변화	36
4.6 J (절리원판 직경의 구간의 개수)에 따른 오차 변화	37
4.7 $ds = dl = 0.5$ 인 경우의 추정 오차 결과	39
4.8 절리직경 모분포의 평균의 변화에 따른 오차 변화	44
4.9 절리직경 모분포의 표준편차의 변화에 따른 오차 변화	45
4.10 적정 γ 의 선택 방안	46
 5. 결론	 49
 참고문헌	 51

그 림 목 차

Figure 1. 암반과 원통형 조사창	7
Figure 2. 원통형 조사창과 절리 원판이 만나 절리선을 형성하는 모습	8
Figure 3. 절리선을 포함한 단면의 모습	9
Figure 4. (a) ~ (e) 일부 JCV(i, j) 영역의 단면 가시화	13
Figure 5. 추정분포의 검증을 위해 계산 영역에 발생된 절리선 (전기환, 2011)	18
Figure 6. 원통형 조사창 개략도	19
Figure 7. 양끝내포선 개수의 증가에 따른 오차의 변화	24
Figure 8. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 (양끝내포선이 180개인 경우)	25
Figure 9. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 99.69 (%))	27
Figure 10. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 39.57 (%))	27
Figure 11. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 25.80 (%))	28
Figure 12. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 17.18 (%))	28
Figure 13. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 13.69 (%))	29
Figure 14. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 10.29 (%))	29
Figure 15. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 14.80 (%))	30
Figure 16. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 (양끝내포선이 3600개인 경우)	31
Figure 17. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 27.02 (%))	33
Figure 18. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 20.46 (%))	33
Figure 19. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 18.35 (%))	34

Figure 20. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 17.57 (%))	34
Figure 21. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 14.24 (%))	35
Figure 22. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 16.21 (%))	35
Figure 23. 절리선구간의 개수(J)와 Gamma(γ)의 변화에 따른 오차의 변화	36
Figure 24. 절리 직경 구간의 개수(J)와 Gamma(γ)의 변화에 따른 오차 의 변화	38
Figure 25. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 ($ds = dl = 0.5$ 인 경우)	39
Figure 26. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 141.2 (%))	40
Figure 27. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 13.78 (%))	41
Figure 28. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 15.54 (%))	42
Figure 29. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 16.04 (%))	43
Figure 30. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 18.31 (%))	43
Figure 31. 정규분포 평균과 Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화	44
Figure 32. 정규분포 표준편차와 Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화	45
Figure 33. 실제 오차와 계산 오차($K=1$)의 Gamma(γ) 값에 따른 변화	47
Figure 34. 실제 오차와 계산 오차($K=1, K=3$)의 Gamma(γ) 값에 따른 변화	48

표 목 차

Table 1. JCV 계산의 조건 기본값(default)	20
Table 2. 추정을 위한 정규분포의 조건 기본값(default)	21
Table 3. JCV 행렬 ($L_{\max} = 30$, $S_{\max} = 10$, $I = 30$, $J = 10$ 인 경우)	23
Table 4. 양끝내포선 개수의 증가에 따른 오차의 변화	24
Table 5. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 (양끝내포선이 180개인 경우)	25
Table 6. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 (양끝내포선이 3600개인 경우)	31
Table 7. 절리선구간의 개수(I)와 Gamma(γ)의 변화에 따른 오차의 변화	37
Table 8. 절리 직경 구간의 개수(J)와 Gamma(γ)의 변화에 따른 오차의 변화	38
Table 9. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 ($ds = dl = 0.5$ 인 경우)	39
Table 10. 정규분포 평균과 Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화	44
Table 11. 정규분포 표준편차와 Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화	45

1. 서론

암반 내에 존재하는 불연속면은 암반 구조물의 역학적 안정성을 떨어뜨리고, 구조물 내로 지하수 유입을 발생시키는 등 문제를 일으키는 요인이다. 서로 다른 주향과 경사를 가진 불연속면들은 상호 교차하면서 블록을 형성하는데, 암반사면이나 지하공간을 굴착할 때 이 블록들이 굴착 공동면에 드러나면 공동내부로 낙하하는 낙반 현상이 발생할 위험이 있다. 이러한 낙반사고는 인명과 재산에 피해를 주고 공동 자체의 안정성에도 악영향을 미칠 수 있다. 그러므로 낙반사고를 분석, 예방하여 안정성을 확보하기 위해서는 불연속면의 분포를 고려하여 암반블록의 발생양상과 거동을 해석하는 것이 중요하다. 본 연구에서는 절리의 기하학적 특성 중에서, 절리면의 크기분포를 추정하는 부분에 초점을 맞추고자 한다.

절리는 일반적으로 암반의 내부에 존재하고 있고 암반이 빛과 전자기파를 투과시키지 않기 때문에, 현장조사에서 절리의 크기를 직접적으로 측정하는 것은 거의 불가능하다. 따라서 현장의 조사창 조사로 얻은 절리선 길이 데이터에 기반하여 통계적으로 절리 직경의 확률분포를 추정하는 방식이 일반적이다.

절리 직경분포의 추정은 귀납적으로, 또는 연역적으로 추정할 수 있다. 귀납적인 방법은 처음부터 직경분포의 종류와 매개변수를 미리 가정하는 분포 종속적(distribution-dependent)인 방법이다. 미리 가정된 분포로부터 이론적인 관계를 이용해 표본분포를 구한 뒤 이를 실제로 조사된 표본분포와 비교한다. 오차가 만족할 만큼 낮은 수준이면, 가정했던 분포를 적절한 추정분포로 받아들인다. 그러나 잘 맞지 않으면 처음에 가정한 직경분포 종류나 매개변수를 바꾼 뒤 다시 같은 과정을 반복하는, 일종의 시행착오법이다. 반면에 연역적인 방법은 분포독립적(distribution-independent)인 방법으로 분포를 미리 가정하지 않으며, 현장에서 실제 측정된 절리선 길이분포를 이용해 기하학적인 위치 관계를 고려하여 직경분포를 추정한다.

송재준(2005)은 암반 사면 혹은 공동 노출면에 설치한 평면 직사각형 조사창에서의 측정한 양끝내포 절리선의 길이 분포를 가지고, 연역적으로 암반 내 절리의 직경분포를 구하는 추정식과 알고리즘을 제안하였다. 보다 더 정확한 추정을 위하여, Song(2009)의 연구에서는 평면 직사각형 조사창과 절리선과의 포함관계에 따라 절리선을 양끝내포선(contained trace), 한끝내포선(dissecting trace), 양끝외포선(transecting trace) 세 가지로 구분하고, 이들을 포함시켜 최적의 해를 찾는 알고리즘을 제안하였다. 추정 및 검증의 결과 기존 연구(송재준, 2005)와 비교했을 때 오차는 크게 감소하였다.

전기환(2011)은 동일한 추정 원리를 암반 내 원통형 조사창, 즉 평면이 아닌 3차원적 조사창으로 확장하여 적용하고 검증하고자 시도하였다. 양끝내포선만을 가지고 추정을 시도하였으며, 추정 결과 오차가 20% 내외인 수준으로 나타났다. 이 오차는 검증 과정에서 절리를 일십만 개나 발생시켜 얻은 결과로, 결코 작지 않은 수준의 오차인 것으로 볼 수 있다.

본 연구에서는 원통형 조사창 조사에서 더욱 정확한 추정을 위해서, 기존에 제시되었던 추정 원리를 사용하되 추정 오차를 줄일 수 있는 방안을 적용하였다.

2. 기존연구의 배경이론

2.1 추정 원리

절리는 포아송 디스크 모델을 따른다고 가정한다. 즉, 절리의 형태는 두께가 없는 원판 형태이며, 원판의 중심점은 3차원 공간 상에 무작위로 위치한다. 직경분포의 추정은 절리군 별로 수행하며, 하나의 절리군에 속한 절리들의 주향, 경사 방향은 모두 동일하여 평행한 것으로 본다.

평면 혹은 3차원 곡면의 조사창에서 나타나는 절리의 길이를 각각 측정하면 길이분포를 얻을 수 있다. 이 길이는 절리 원판이 조사창 면과 만나서 생기므로, 이 길이만으로는 실제 암반 내에 존재하는 절리 원판의 직경이 얼마인지는 직접적으로는 알 수 없다. 이 때, 제안된 추정 원리를 적용하여 현장조사의 길이분포도를 가지고 절리 직경의 확률밀도함수 c_s 를 구하는 것이 목적이다.

길이가 l 인 절리의 개수는 식 (1)과 같다. $(JCV)_{l,s}$ 는 joint center volume의 약자로, 절리 직경이 s 인 절리가 길이 l 을 나타내기 위해서, 중심점이 존재할 수 있는 모든 공간의 부피를 의미한다. 즉 JCV는 2차원배열(행렬)이다. λ_V 는 절리 원판 중심의 체적빈도로, 단위 부피의 암반 내 존재하는 절리 원판 중심의 개수를 의미한다. λ_V 는 상수(constant value)로서 추정의 최종과정에서 얻을 수 있다.

원판 직경분포가 알려져 있을 때 JCV 내부의 절리 중심 개수는 이 JCV 부피와 특정 직경구간에 해당하는 절리 체적빈도의 곱으로 구할 수 있고, 이를 모든 절리 직경에 대해 적분하면 길이가 l 인 절리의 개수를 구할 수 있다. 직경분포를 이산함수로 가정하면 적분식은 식 (2)로 표현할 수 있다. c_j 를 제외한 나머지 항들을 묶어 a_{ij} 로 표현하면 식 (3)과 같다.

$$N_l = \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} \{(JCV)_{l,s} \times \lambda_V \times c_s\} ds \quad \text{식 (1)}$$

$$N_i = \sum_{j=1}^n \{(JCV)_{ij} \times \lambda_V \times c_j\} \Delta s \quad \text{식 (2)}$$

$$N_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j \quad \text{식 (3)}$$

n 은 절리 원판 직경 s 의 분할된 계급구간 개수이다. 식 (3)을 풀면 c_j 를 구할 수 있다.

기존의 연구에서는 오차제곱의 합이 최소가 되도록 하는 c_j 를 구하였다. N'_i 를 현장조사로부터 얻은, i 번째 길이 구간에 속하는 절리선의 개수라 하면, 각 구간의 오차제곱합은 식 (4)로 나타낼 수 있다.

$$E^2 = \sum_{i=1}^m [N'_i - N_i]^2 \quad \text{식 (4)}$$

위 오차제곱합이 최소가 되는 때의 직경분포 c_j 를 구하기 위해 다음과 같이 c_k 로 편미분한다.

$$\frac{\partial E^2}{\partial c_k} = -2 \sum_{i=1}^m \left(N'_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} c_j \right) a_{ik} = 0, \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{식 (5)}$$

식 (5)를 만족하도록 다시 정리하면 아래와 같다.

$$\sum_{i=1}^m N'_i a_{ik} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ik} a_{ij} c_j, \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{식 (6)}$$

식 (6)은 아래처럼 행렬방정식으로 간단히 나타낼 수 있다.

$$A_{kj} c_j = b_k \quad \text{식 (7)}$$

$$\text{단, } b_k = \sum_{i=1}^m N'_i a_{ik} \text{ , } A_{kj} = \sum_{i=1}^m a_{ik} a_{ij}$$

이 행렬방정식은 가우스 소거법(Gauss elimination), SOR법(successive over relaxation method), 또는 Conjugate gradient method 등과 같은 수치계산으로 풀어서 직경분포 c_j 를 구할 수 있다.

식 (2)에서 절리의 체적빈도 λ_V 는 상수로 취급한다. 최종적으로 직경분포의 확률밀도를 구했을 때, 확률밀도함수의 정의상 전체영역의 넓이가 1로 정규화(normalize)된다. 그러므로 사실상 처음에 곱해지는 상수의 값은 그 영향을 상실한다. 즉, 체적빈도를 처음에 1로 가정하고 직경분포 c_j 를 구했을 때 정규화시키기 이전의 확률분포의 총 면적이 곧 상수인 체적빈도 λ_V 와 같은 값이다. 결과적으로 직경분포를 추정하는 과정에서 체적빈도도 함께 얻을 수 있다.

2.2 결과의 검증

추정결과에 대한 검증은 몬테-카를로 시뮬레이션(Monte-Carlo Simulation)을 통해 이루어졌다. 특정 분포를 따르는 난수를 발생하여, 이를 가상적으로 측정한 샘플로 삼는다. 본래 실제 환경에서 얻은 자료로도 암반 내의 절리 크기의 모분포를 아는 것은 불가능하므로, 가상의 샘플을 발생시켜서 추정 알고리즘을 적용한 후 그 결과와 샘플의 모분포를 비교하는 것이다.

즉, 본 연구의 추정 결과의 정확도만을 확인하기 위해서는 실제 현장에서의 검증을 필요로 하지 않을 뿐만 아니라, 정확한 현장 검증 자체가 불가능하다

고 볼 수 있다.

2.3 응용

양끝내포선을 만드는 절리원판의 중심점이 놓이는 영역 JCV 를 적절히 정의하면 식 (7)은 조사창의 형상과는 상관없이 임의의 조사창에 대하여 적용할 수 있을 것이다.

본 연구는 3차원 원통형 조사창을 이용하여 양끝내포선의 길이 분포를 가지고 암반 내 절리의 크기(직경)분포를 추정함에 있어 이와 같은 이론을 적용한 것이다. 더 나아가 추정 오차를 줄이는 방안을 연구하였다.

3. 연구 방법

3.1 계산 영역

계산을 위한 도메인의 형태는 **Figure 1**과 같다. 한 변의 길이가 터널의 길이와 같은 정육면체 암반 내부에 원통형 공동을 설치하여 이를 조사창으로 삼는다. 터널의 굴착 방향은 y 축 방향이며, 도메인의 중심은 직교좌표계의 원점인 $(0,0,0)$ 에 위치한다.

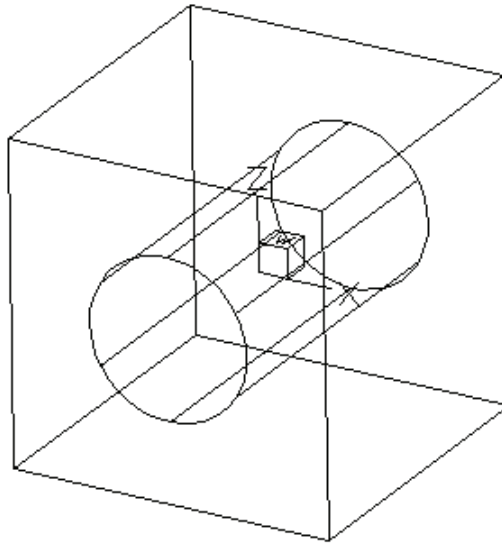


Figure 1. 암반과 원통형 조사창

절리의 기하학적 요소는 절리의 크기, 주향, 경사가 있는데, 이 중 주향은 항상 같다고 간주하고 고려하지 않았다. 절리 원판의 위치를 고정시키고 원통의 길이방향 축으로 회전하면, 주향은 항상 동일한 값으로 조정할 수 있다.

3.2 절리선 길이의 계산

원통형 조사창에서의 절리 직경분포를 추정하기 위해서는, 먼저 원통형 공동면과 절리 원판이 만났을 때 교선으로 나타나는 절리선의 길이를 계산하여야 한다. 조사창과 절리 원판이 만나 절리선을 만드는 단면을 정면으로 바라보면, 절리선은 타원 중에서 타원과 원이 만나 겹쳐지는 부분에 해당한다. (Figure 2)

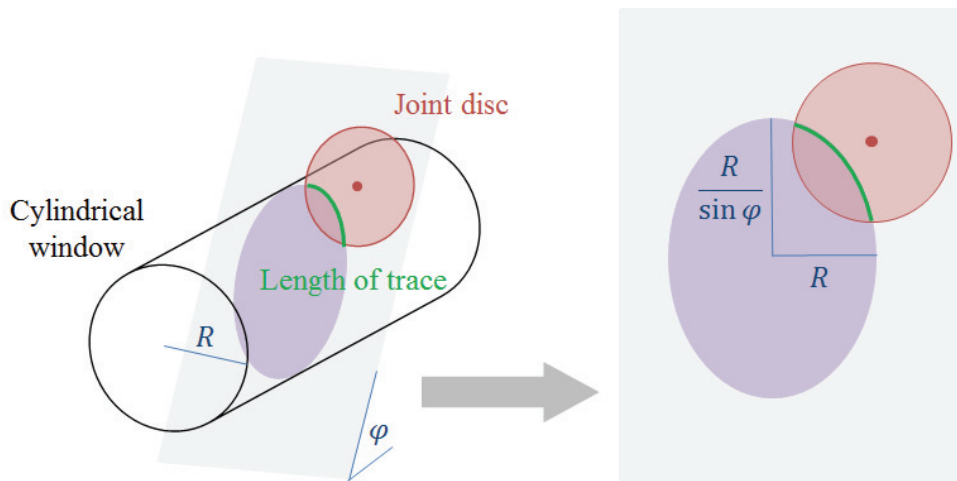


Figure 2. 원통형 조사창과 절리 원판이 만나 절리선을 형성하는 모습

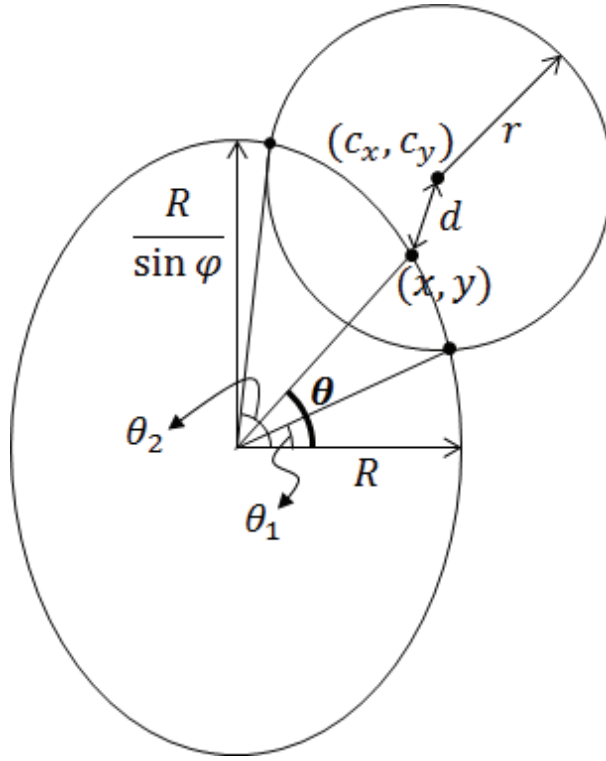


Figure 3. 절리선을 포함한 단면의 모습

Figure 3에 나타나 있듯이 절리의 경사가 ϕ 일 때, 타원은 단축이 R , 장축이 $\frac{R}{\sin \phi}$ 이며, 이 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{R}{\sin \phi}\right)^2} = 1 \quad \text{식 (8)}$$

단축, 장축을 각각 a , b 라고 하고, 그림과 같이 타원의 단축으로부터의 회전각을 θ 라고 할 때, 타원 위의 점 (x, y) 에서 y 좌표는

$$y = (\tan \theta) x \quad \text{식 (9)}$$

와 같으며, 이를 타원의 방정식에 대입하면

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\tan \theta)^2 x^2}{b^2} = 1 \quad \text{식 (10)}$$

와 같다. 이를 x 에 대하여 정리하면 $x(\theta)$ 는

$$x(\theta) = \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\tan^2 \theta}{b^2}\right)}} \quad \text{식 (11)}$$

이다. 식 (11)에서 $\frac{\cos \theta}{|\cos \theta|}$ 는 x 좌표의 부호를 결정하는 항이다.

같은 방법으로 y 에 대하여 θ 를 사용하여 정리하면 $y(\theta)$ 는

$$y(\theta) = \frac{\sin \theta}{|\sin \theta|} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2 \tan^2 \theta} + \frac{1}{b^2}\right)}} \quad \text{식 (12)}$$

와 같으며, 이 경우에도 마찬가지로 $\frac{\sin \theta}{|\sin \theta|}$ 는 y 좌표의 부호를 결정하는 항이다.

변수 θ 로 매개화된 곡선 $F(x, y)$ 에 대하여 θ_1 부터 θ_2 까지의 길이 l 을 구하는 공식은 아래와 같다.

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} |F'(\theta)| d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad \text{식 (13)}$$

타원 위의 점 (x, y) 와 절리 원판의 중심점 (c_x, c_y) 사이의 거리 d 가 절리 원판의 반경 r 보다 작다면, 그 점은 절리 위의 점인 것으로 판단할 수 있다. 다시 말해, 절리 원판 중심과의 거리가 원판의 반지름보다 작은 교점들의 집합이 곧 절리선이 되는 것이다. 거리 d 의 식은 아래와 같다.

$$d = \sqrt{(c_x - x)^2 + (c_y - y)^2} \quad \text{식 (14)}$$

즉, 타원의 중점을 중심으로 각도 $\theta = 0^\circ$ 에서 360° 까지 아주 작은 간격 $d\theta$ 로 이산화하여 타원 위의 각 점 $(x(\theta), y(\theta))$ 에 대해 절리 위의 점에 해당하는 지 여부를 판단한 후, 수치적분으로 절리의 길이를 구할 수 있다. 최종 적분식은 아래와 같다.

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi} \frac{a}{b} \left[\frac{1}{\cos^2 \theta + \left(\frac{a}{b} \sin \theta\right)^2} \right] d\theta \quad \text{식 (15)}$$

$$\text{단, } \psi = \arctan\left(\frac{a}{b} \tan \theta\right)$$

본 연구에서는 행렬방정식의 수치적 해법으로 가우스-조던 소거법 (Gauss-Jordan Elimination)을 사용하였다.

3.3 Joint center volume의 계산

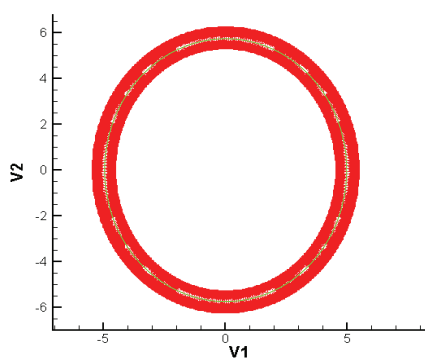
Joint center volume(이하 JCV)은 2차원 평면 직사각형 모양의 조사창인 경우, 절리 원판의 직경과 조사창 내 절리선 길이 변화에 따른 기하학적인 관계를 고려하면 절리 중심점의 영역이 평행육면체의 형태로 나타난다. 즉 기하학적으로 규명할 수 있기 때문에 하나의 계산식으로 표현할 수 있다.

그러나 본 연구에서는 3차원 곡면을 대상으로 하기 때문에 이론적으로, 또는 기하학적인 방식으로 JCV 값을 산정하기가 쉽지 않다. 그러므로 원통형 조사창을 포함한 계산 영역 전체를 3개의 축을 따라 동일한 간격으로 잘게 세분화하여, 모든 격자 요소와 모든 절리 직경의 경우에 대해 절리 길이를 조사하는 전수조사기법을 사용해야 한다.

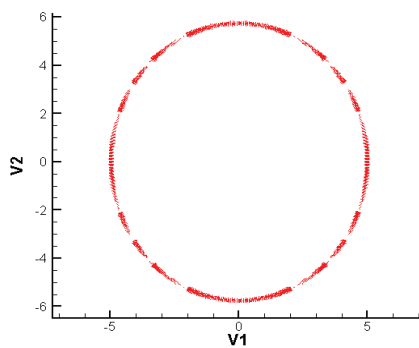
일부 JCV 영역의 단면을 붉은색으로 가시화하면 아래 **Figure 4** 와 같다. 예를 들어 (a) JCV(1, 1)은 절리 원판의 직경 값이 1인 동시에, 절리선의 길이가 0 초과 ~ 1 이하인 절리 원판의 중심이 위치할 수 있는 공간을 의미한다. 원통형 조사창의 단면인 타원을 중심으로 바깥쪽과 안쪽에 두 개의 영역이 형성되어 있는 것을 확인할 수 있다.

(b) JCV(2, 1)은 절리 원판의 직경이 1인 동시에, 절리선의 길이가 1초과 ~ 2이하인 절리 원판의 중심이 위치할 수 있는 공간이다. 평면 직사각형 조사창 조사의 경우, JCV(2, 1)의 영역은 나타나지 않는다. 왜냐하면 절리 원판이 평면 조사창에서 만들 수 있는 절리선 최대 길이는 절리 원판의 직경을 넘지 않기 때문이다. 하지만 원통형 조사창의 경우 절리선이 직선이 아닌 곡선의 형태이기 때문에 절리 원판의 직경보다 더 큰 값이 나타날 수 있다.

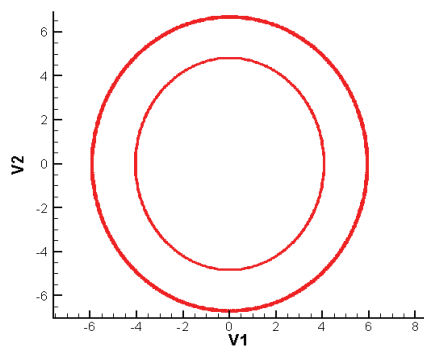
(b) JCV(2, 1)은 원통형 조사창의 단면인 타원과 가까운 위치에 형성되어 있다. 절리 원판의 중심 위치가 타원에 가까울수록 절리선의 길이는 크며, 타원으로부터 멀수록 절리선의 길이는 짧다. 절리 원판 직경이 2 인 경우를 보았을 때, (c) JCV(1, 2), (d) JCV(2, 2), (e) JCV(3, 2) 그림의 순차적 변화로부터 이를 확인할 수 있다.



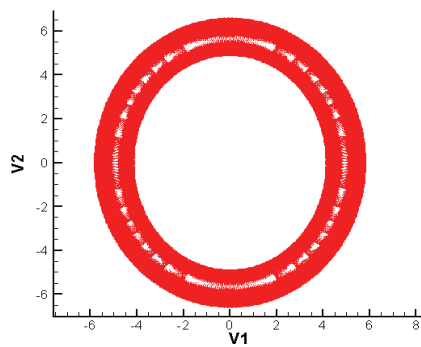
(a) JCV(1, 1)



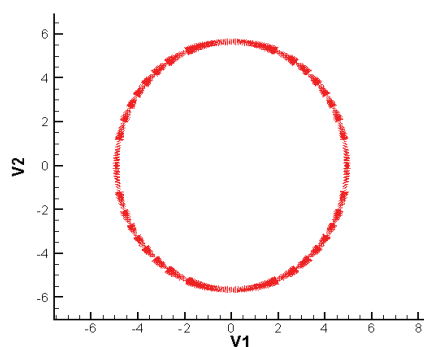
(b) JCV(2, 1)



(c) JCV(1, 2)



(d) JCV(2, 2)



(e) JCV(3, 2)

Figure 4. (a) ~ (e) 일부 JCV(i, j) 영역의 단면 가시화

3.4 추정오차를 줄이기 위한 수치적 해법 이용

자연현상으로 나타나는 물리적 문제를 풀기 위해서, 보통 비접촉식 측정장비(indirect sensing devices)를 사용하여 자연 현상을 측정한다. 이 때 장비를 이용하여 얻은 측정 자료와 우리가 추정하고자 하는 변량 사이의 관계는 흔히 아래와 같이 표현된다.

$$\int K(x, y)f(x)dx = b(y) \quad \text{식 (16)}$$

$f(x)$ 는 우리가 구하고자 하는 미지의 함수이며, $b(y)$ 는 기기를 통해 측정된 기지의 함수이다. $K(x, y)$ 은 적분방정식의 커널(kernel)로 알려져 있으며, 사용되는 특정 적분방정식마다 달라진다.

이는 적분 방정식의 일반적인 형태이며, 적분의 상한값이 고정되어 있는 경우의 적분방정식을 "제 1종 프레드홀름 적분방정식(Fredholm integral equation of the 1st kind)"으로 구분한다.

이 방정식은 우리가 풀고자 하는 식 (1)과 그 모양이 동일하며, 이 경우에 커널 $K(x, y)$ 은 $JCV(i, j)$ 에 해당한다.

이 때 방정식을 수치적으로 풀면 $f(x)$ 는 상당히 진동이 심한(oscillatory) 결과를 보인다. 대부분의 자연현상은 그래프로 나타내었을 때 요철이 없이 매끄러운 양상 혹은 거동을 보이며, 수치해법으로 얻은 해에 나타난 진동(oscillation)은 우리가 원치 않는 결과라고 할 수 있다. 이 진동을 줄이고 완만하게 만드는 해법이 Phillips (1962)에 의하여 제안되었으며, 같은 방법이 Twomey(1963)에 의해서도 후술되었다. 본 연구의 직경분포 추정 과정에 이러한 해법을 적용해 보았다.

진동을 감소시킨 수치해를 얻기 위하여, 먼저 아래와 같이 식 (17)의 우변에 아주 작은 임의의 오차 함수 ϵ_i 를 취한다.

$$\sum_j a_{ij} c_j = b_i \quad \text{식 (17)}$$

$$\sum_j a_{ij} c_j = b_i + \epsilon_i, \quad \text{단 } |\epsilon_i| \ll |b_i| \quad \text{식 (18)}$$

c_j 를 구하기 위하여 최소화시킬 식 E 는 아래의 식 (19)와 같다. E 의 첫 번째 항은 함수 c_i 의 2계 미분과 같은 것으로, 함수가 얼마나 급격하게 변하는 지에 대한 정도를 나타낸다. 두 번째 항은 인위적으로 덧붙인 ϵ_i 함수의 절대적 크기를 나타낸 것으로, 곱해진 γ^{-1} 는 라그랑즈 승수(Lagrangian multiplier)라고 불리는 보조변수이다.

$$E = \sum_{i=2}^{N-1} (c_{i-1} - 2c_i + c_{i+1})^2 + \gamma^{-1} \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 \quad \text{식 (19)}$$

이제 식 E 가 최소가 되도록 하는 c_j 를 구하기 위해, 다음과 같이 둘 수 있다.

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0 \quad \text{식 (20)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = 2(c_{i-2} - 4c_{i-1} + 6c_i - 4c_{i+1} - c_{i+2}) + 2\gamma^{-1} \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\sum_{k=1}^N \epsilon_k^2 \right) = 0 \quad \text{식 (21)}$$

또한, 우리는 최초의 식 (18)로부터

$$\epsilon_i = \sum_j a_{ij} c_j - b_i \quad \text{식 (22)}$$

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i} \left(\sum_j a_{kj} c_j - b_k \right) = a_{ki} \quad \text{식 (23)}$$

를 얻을 수 있다.

위의 식 (21)에 식 (23)를 대입하면, 최종적으로 풀어야하는 식은 아래와 같다.

$$\sum_j a_{ji} \epsilon_j + \sum_j \gamma h_{ij} c_j = 0$$

$$\text{또는 } (A^* A + \gamma H) \vec{c} = A^* \vec{b} \quad \text{식 (24)}$$

이 때 행렬 A 는 $JCV(i, j)$ 를 포함한 행렬이고, 행렬 A^* 는 행렬 A 의 전치 행렬(Transpose matrix)이며, 행렬 H 는 상수로 이루어진 행렬로써 아래와 같다.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & & & & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & \dots & \dots & & & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & & & & & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

만약 $\gamma = 0$ 이면, 최종 방정식은

$$(A^* A) \vec{c} = A^* \vec{b} \quad \text{식 (25)}$$

와 같아지므로, $\gamma=0$ 이면 결국 최소제곱법으로 해를 구하는 것과 동일한 경우라고 볼 수 있다.

먼저 γ 값을 정하고 방정식을 풀어 c_j 를 구한 뒤, 이 추정된 c_j 를 원래의 절리 직경 도수분포와 비교하여 오차를 구할 수 있다. 이 때 서로 다른 γ 값에 따른 추정분포 결과 및 오차 값을 비교하여, γ 값이 함수의 추정에 있어 어떤 효과를 주는지 살펴볼 수 있다. 또한, 추정오차가 최소가 되는 γ 값을 시행착오법(Trial-and- error method)을 통해 찾을 수 있다.

3.5 추정결과의 검증 방법

추정한 분포의 검증을 위해 기존 연구에서 사용했던 몬테-카를로 기법 (Monte-Carlo simulation)을 그대로 이용한다. 최종적으로 풀어야 하는 행렬 방정식에서 N'_i 는 현장에서 얻은 실측 데이터를 사용하여야 한다. 그러나 앞서 기존연구의 배경이론에서 언급하였듯이, 몬테-카를로 시뮬레이션을 이용하면 실측 조사를 거치지 않고도 추정방법을 검증할 수 있다.

먼저, 3차원 공간에 가상적으로 원통형 조사장과 절리군을 생성시킨다. 절리는 포아송 디스크 모델을 따른다고 가정했으므로, 원판 중심점의 좌표 (c_x, c_y, c_z) 는 무작위 난수를 발생시켜 위치시킨다. 직경은 미리 정의된 임의의 분포를 따르도록 난수를 발생시켜 하나의 원판에 하나의 직경 값을 할당한다. 이러한 과정에 의해 절리선들은 **Figure 5** 와 비슷한 형태로 만들어질 수 있다.

즉, 직경분포의 모분포는 미리 정해놓은 분포를 따르게 되며, 추정한 결과와 모분포를 직접 비교하면 얼마나 차이가 나는지 오차를 구할 수 있다. 다시 말해 추정 결과가 이 모분포와 잘 들어맞으면 추정이 잘 된 것으로 판단할 수 있다.

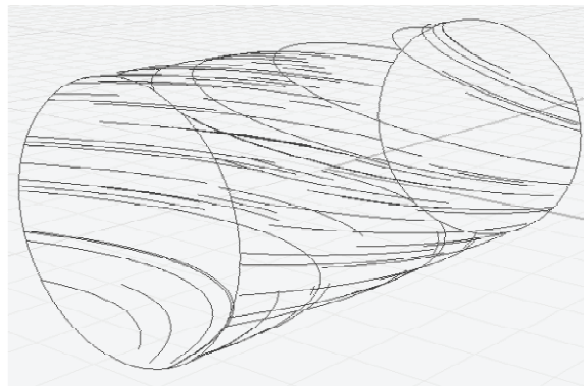


Figure 5. 추정분포의 검증을 위해 계산 영역에 발생된 절리선 (전기환, 2011)

4. 결과 및 고찰

4.1 계산 조건

추정 알고리즘을 검증하기 위해, 계산에 사용된 가상의 원통형 조사창은 수직 단면의 반지름이 5 m이고 길이는 20 m 로, 그림으로 나타내면 아래와 같다.

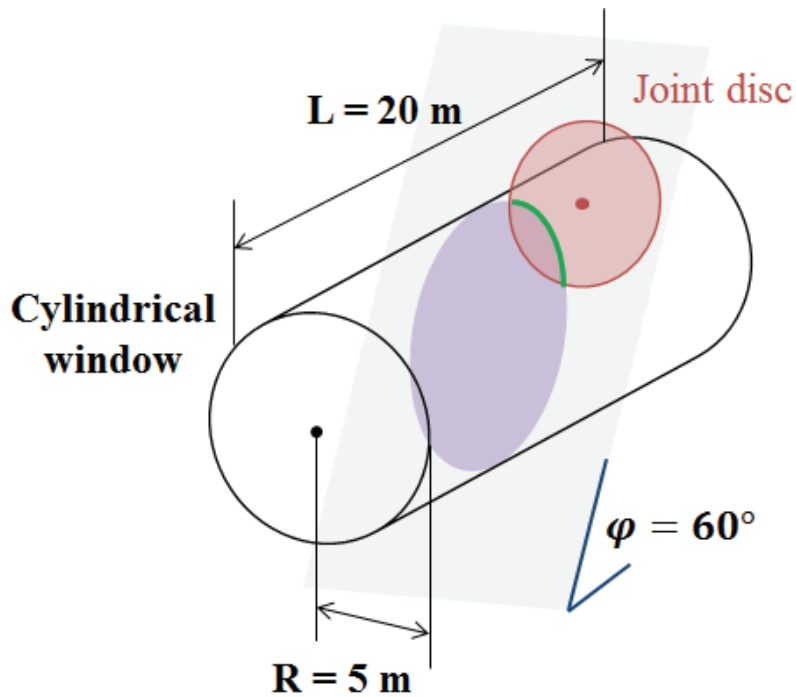


Figure 6. 원통형 조사창 개략도

JCV를 구하는 전수조사 시, x축, y축, z축으로 0.05의 크기로 공간을 분할하여 조사하였다. 절리 길이를 구할 때는, 타원의 중점을 중심으로 각도

$\theta = 0^\circ$ 에서 360° 사이를 1000개 등분하여 수치적분 하였다. (즉, $d\theta = 2\pi/1000 \simeq 0.0063$) 보다 작은 $d\theta$ 를 사용하면 절리 길이를 더욱 정확하게 계산할 수 있지만, 계산하는 데 시간이 오래 걸리고 1000개 등분하여도 계산 결과와 큰 차이는 없었으므로, 충분히 작은 수준인 것으로 간주하였다.

추정 결과를 논할 때 특별한 언급이 없으면, 추정에 사용된 *JCV* 는 아래 Table 1 과 같은 기본값(default)으로 계산된 것이다.

Table 1. *JCV* 계산의 조건 기본값(default)

변수	변수의 의미	기본값
L_{\max}	절리선 길이의 최대 크기	30
S_{\max}	절리원판 직경의 최대 크기	10
I	절리선 길이의 구간의 개수	30
J	절리원판 직경의 구간의 개수	10
dl	절리선 길이의 구간의 크기 ($dl = L_{\max}/I$)	1
ds	절리원판 직경의 구간의 크기 ($ds = S_{\max}/J$)	1

추정된 해를 검증하는 몬테-카를로 시뮬레이션 과정에는 가상의 절리군이 사용되었다. 이 절리군의 직경 분포는 정규분포(Normal distribution)를 따르는 것으로 가정하였다. 절리 원판이 크기가 터널형 조사창 크기에 비하여 비교적 크지 않은 수준으로 하였고, 절리 직경은 최대 10 m 를 넘지 않도록 했다. 절리군의 경사는 항상 수평면으로부터 60 도인 것으로 설정하였다. (절리의 경사 각도가 추정결과에 어떠한 영향을 미치는 지는 본 연구에서 다루지 않았다.)

절리군의 경사방향은 항상 원통 축과 평행하도록 고정하였다. 경사방향이 달라지더라도, 원통 축을 회전축으로 하여 원통과 절리면 전체를 회전시키다 보면, 결국 절리면의 경사방향이 축과 평행하도록 만들 수 있다. 이는 조사창이 원통형이기 때문에 가능한 것이며, 따라서 절리면의 경사방향은 고려하지

않아도 무방하다.

추정 결과를 논할 때 특별한 언급이 없으면, 추정에 사용된 정규분포의 평균은 5 m, 표준편차는 2.5 m, 양끝내포선의 개수는 약 180 개다. 즉, 아래 Table 2 와 같은 기본값(default)을 사용한 것이다.

Table 2. 추정을 위한 정규분포의 조건 기본값(default)

변수	변수의 의미	기본값
개수	몬테-카를로 시뮬레이션에 사용된 양끝내포선의 개수	약 180
Mean	몬테-카를로 시뮬레이션에 사용된 정규분포의 평균	5.0
S.D.	몬테-카를로 시뮬레이션에 사용된 정규분포의 표준편차	2.5

각각의 추정 결과를 비교하는 지표는 추정 오차 값이다. 추정 오차는, 직경의 모분포와 추정분포의 확률밀도값을 구간별로 비교하여 각 구간에서의 값 차이의 절대값을 모두 합한 수치로 정의하였다. 몬테-카를로 시뮬레이션은 매번 수행할 때 마다 오차 값이 다르게 나타날 수 있으므로, 몬테-카를로 시뮬레이션을 10회 수행하여 얻은 오차의 평균을 대표 오차로 삼아서 결과를 서로 비교하였다.

4.2 JCV 행렬

$JCV(i, j)$ 는 아래와 같은 변수들에 따라 다른 값을 가질 수 있다.

L_{\max} = 절리선 길이의 최대 크기

S_{\max} = 절리원판 직경의 최대 크기

I = 절리선 길이의 구간의 개수

J = 절리원판 직경의 구간의 개수

dl = 절리선 길이의 구간의 크기 ($dl = L_{\max}/I$)

ds = 절리원판 직경의 구간의 크기 ($ds = S_{\max}/J$)

즉, JCV 행렬은 크기가 $I \times J$ 인 행렬이며, 확률밀도함수 c_j 는 계급 수가 J , 계급구간의 크기가 ds 인 이산함수이다. 절리선 길이의 구간의 크기, 즉 $dl = L_{\max}/I$ 값이 달라지면 JCV 도 달라지므로 추정 결과에 영향을 줄 수 있다. 절리 직경 구간의 크기인 $ds = S_{\max}/J$ 도 마찬가지로 추정 결과에 영향을 준다.

전수조사기법을 사용하여 기본값 조건(**Table 1**)에서 구한 $JCV(i, j)$ 행렬은 아래 **Table 3** 와 같다.

Table 3. JCV 행렬 ($L_{\max} = 30$, $S_{\max} = 10$, $I = 30$, $J = 10$ 인 경우)

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.453	0.135	0.090	0.071	0.060	0.055	0.049	0.048	0.047	0.047
2	0.044	0.768	0.306	0.222	0.186	0.164	0.152	0.143	0.139	0.137
3	0	0.091	0.870	0.411	0.314	0.272	0.248	0.235	0.229	0.222
4	0	0	0.226	0.895	0.482	0.387	0.343	0.320	0.307	0.302
5	0	0	0	0.389	0.861	0.522	0.434	0.398	0.380	0.370
6	0	0	0	0	0.582	0.792	0.538	0.466	0.438	0.427
7	0	0	0	0	0	0.791	0.714	0.537	0.483	0.466
8	0	0	0	0	0	0	1.000	0.634	0.525	0.496
9	0	0	0	0	0	0	0	0.926	0.562	0.506
10	0	0	0	0	0	0	0	0.270	0.692	0.506
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0.514	0.504
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0.158	0.551
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.248
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.116
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.052
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.017
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
⋮					⋮					⋮
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

절리선 구간의 개수 I 를 30과 같이 넉넉히 큰 수로 잡은 의미는, 절리 원판이 자신의 최대 직경보다 큰 절리 길이를 나타내더라도 JCV 행렬에 포함할 수 있도록 하기 위함이다. 어차피 최종방정식을 푸는 과정에서 JCV 행렬과 JCV 의 전치행렬을 곱한 $J \times J$ 행렬을 이용하므로, 0인 행렬요소 값은 결과에 영향을 미치지 않는다.

서로 다른 I, J 에 따른 JCV 를 사용하였을 때 나타나는 추정 결과의 차이 및 오차 분석은 본문 결과의 4.5 ~ 7절에서 논하였다.

4.3 양끝내포선의 개수에 따른 오차 변화

아래 그래프는 $\gamma=0$ 일 때 양끝내포선의 개수의 변화에 따른 추정 오차의 변화를 나타낸 것이다. 양끝내포선의 개수가 증가할수록 표본의 크기가 커지기 때문에 추정오차는 감소하게 된다.

그래프에서 볼 수 있듯이, 양끝내포선의 개수가 1000여개 이하인 경우 오차는 표본 개수가 증가할수록 급격히 감소하나, 표본 개수가 어느 정도 이상일 경우에는 오차가 천천히 감소하면서 20% 내외 수준으로 머물렀다.

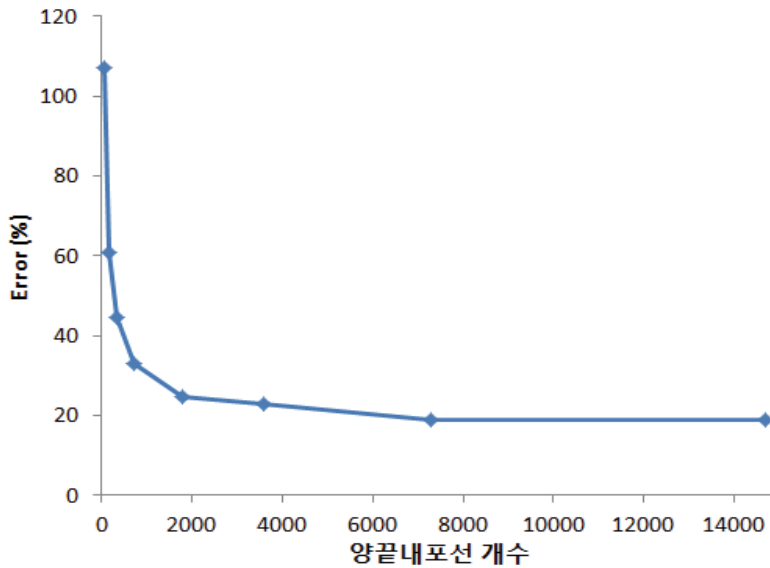


Figure 7. 양끝내포선 개수의 증가에 따른 오차의 변화

Table 4. 양끝내포선 개수의 증가에 따른 오차의 변화

양끝내포선 개수 (대략)	70	180	350	730
오차 (%)	107.15	60.743	44.477	32.998
양끝내포선 개수 (대략)	1800	3600	7300	14700
오차 (%)	24.551	23.016	18.975	18.78

4.4 γ 값의 변화에 따른 오차 변화

양끝내포선이 180개 내외인 경우, $L_{\max} = 30$, $S_{\max} = 10$, $I = 30$, $J = 10$ 으로 구한 JCV 행렬을 이용하여 추정하였을 때, γ 값의 변화에 따른 오차의 변화는 아래 **Figure 8**, **Table 5** 와 같다. 이 경우 $\gamma = 5.0$ 내외에서 가장 작은 추정오차를 나타내었다.

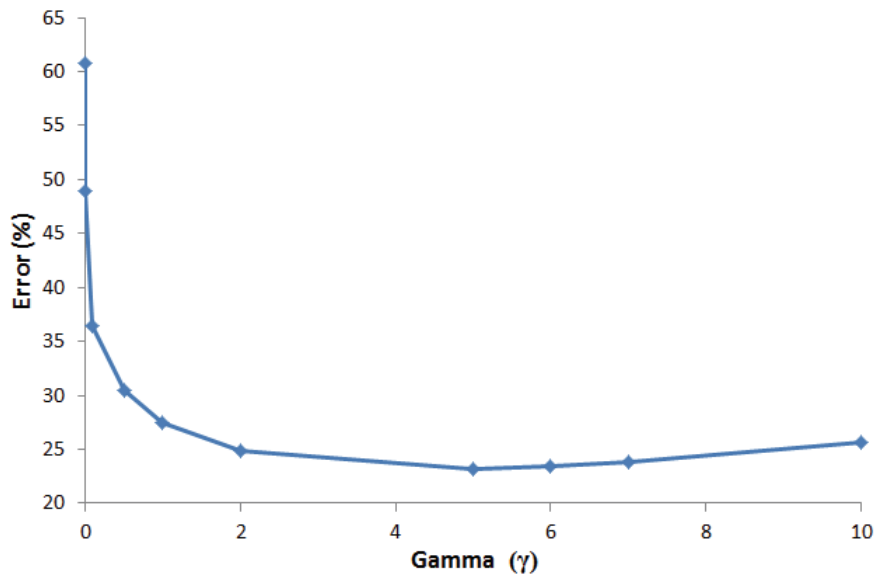


Figure 8. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 (양끝내포선이 180개인 경우)

Table 5. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 (양끝내포선이 180개인 경우)

Gamma (γ)	0	0.01	0.1	0.5	1.0
오차 (%)	60.743	48.894	36.481	30.404	27.532
Gamma (γ)	2.0	5.0	6.0	7.0	10.0
오차 (%)	24.92	23.238	23.437	23.794	25.606

그래프에서 볼 수 있듯이, γ 가 0 에서부터 조금씩 증가할수록 오차는 급격히 감소하고, 5 보다 큰 경우에 오차는 다시 증가하게 된다. $\gamma=0.0$ 일 때 오차가 61% 정도였는데, 최소 오차를 보여준 $\gamma=5.0$ 에서는 오차가 23% 수준으로 처음보다 상당히 크게 떨어진 것을 확인할 수 있다.

같은 조건에서 10회 수행한 몬테카를로 시뮬레이션 중 하나의 케이스에 대하여, 추정분포와 모분포의 비교 그래프를 γ 의 변화에 따라 순차적으로 나열하면 아래 그림들과 같다. 추정분포와 모분포의 확률밀도함수 차이를 오차(Error)(%)로 계산하여 각 그림의 설명에 기재하였다. $\gamma=0.0$ 일 때 추정분포는 상하로 지그재그 모양의 큰 진동(oscillation)을 보이며 가장 큰 오차를 보였다. γ 값을 점점 증가시키면 추정분포의 진동이 점차 완화됨을 그래프에서 순차적으로 확인할 수 있다. 또한 추정분포의 모양이 모분포의 모양과 흡사해지면서 오차도 점점 감소한다. $\gamma=5.0$ 일 때 가장 낮은 오차 수준인 10.29%를 보였다. 이는 처음 $\gamma=0.0$ 일 때 오차가 거의 100% 였던 것을 감안하면, 오차를 감소시키는 효과가 상당했다는 것을 알 수 있다. 그런데 γ 값이 이보다 커지면 추정분포의 곡선이 더욱 완만해지면서 오히려 모분포와의 차이가 더 커진다. 즉, 특정 γ 값에서 가장 낮은 오차를 보이고, 그보다 큰 γ 를 이용한 경우 오차는 오히려 더 증가함을 알 수 있다.

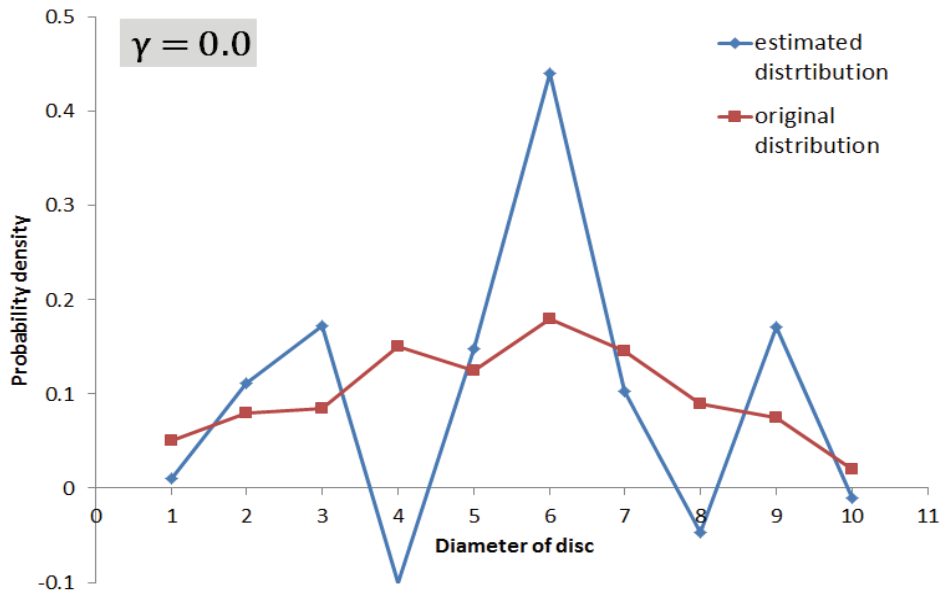


Figure 9. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 99.69 (%))

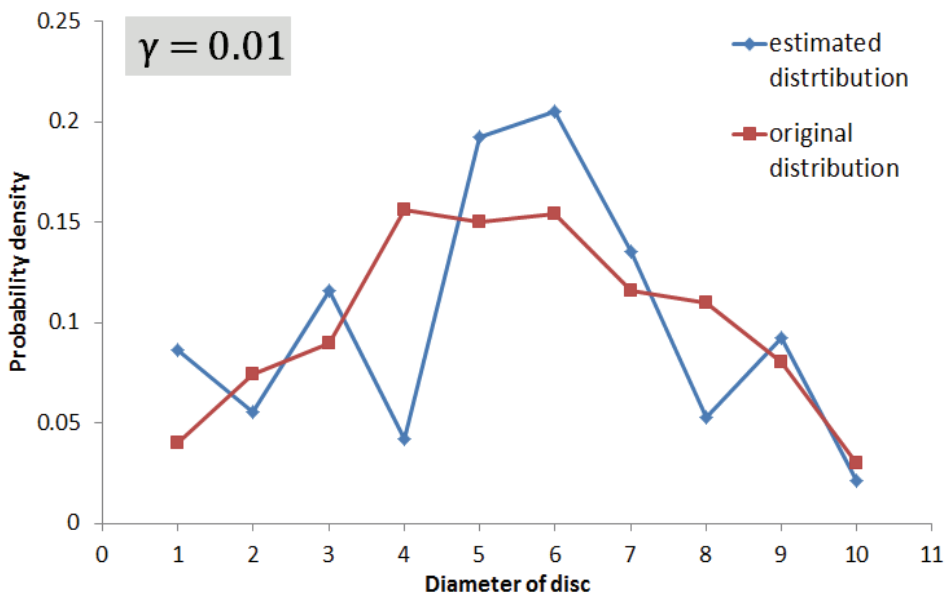


Figure 10. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 39.57 (%))

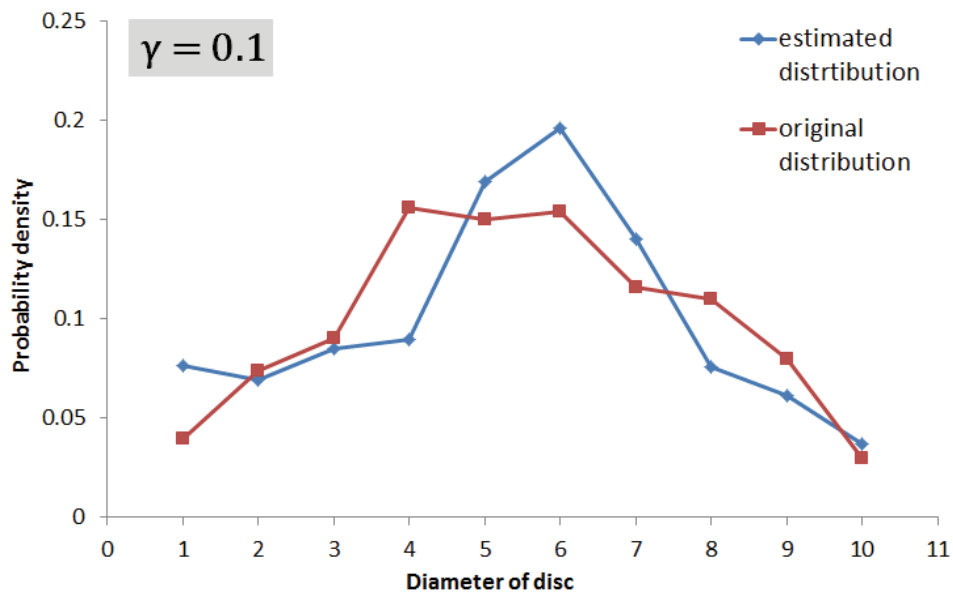


Figure 11. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 25.80 (%))

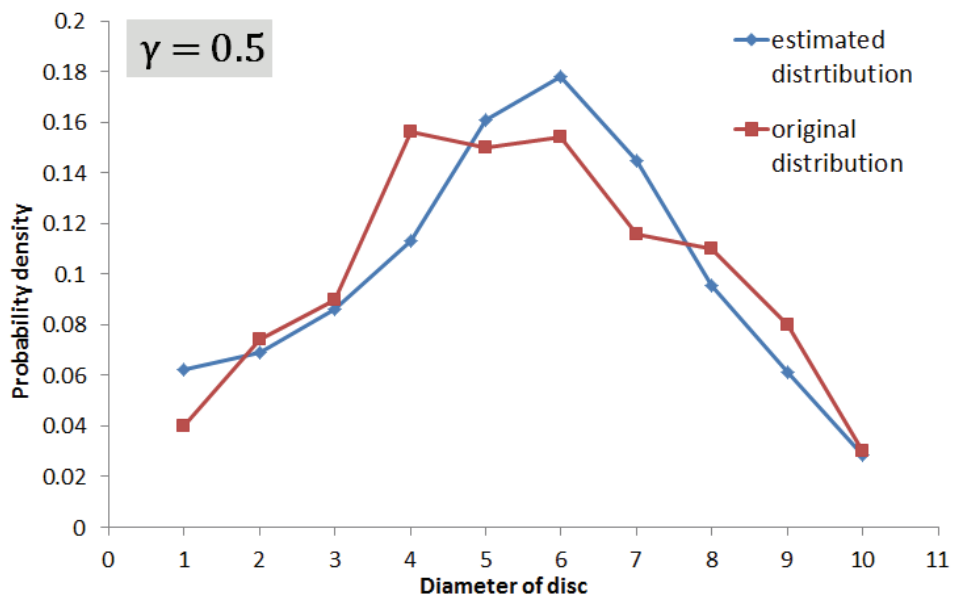


Figure 12. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 17.18 (%))

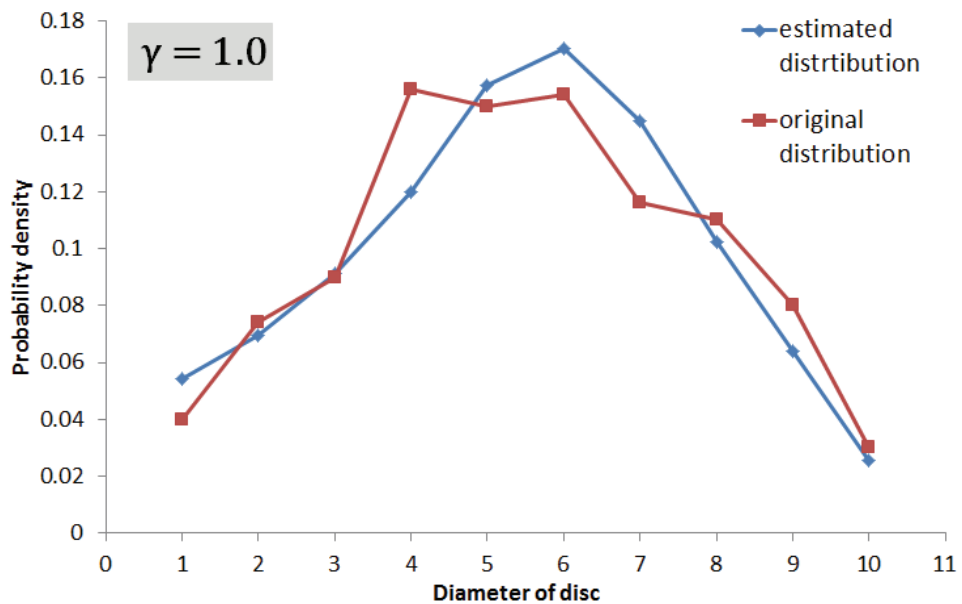


Figure 13. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 13.69 (%))

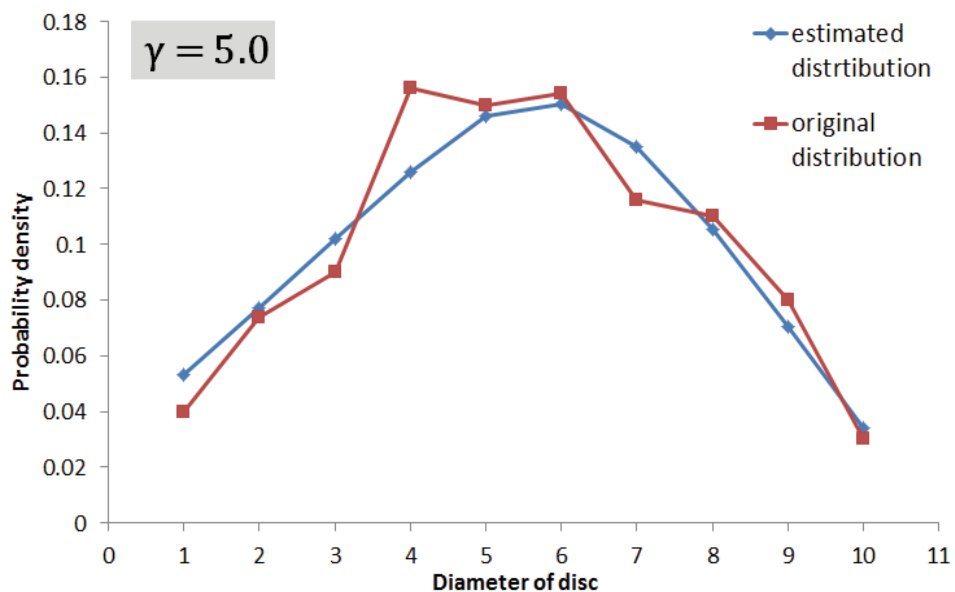


Figure 14. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 10.29 (%))

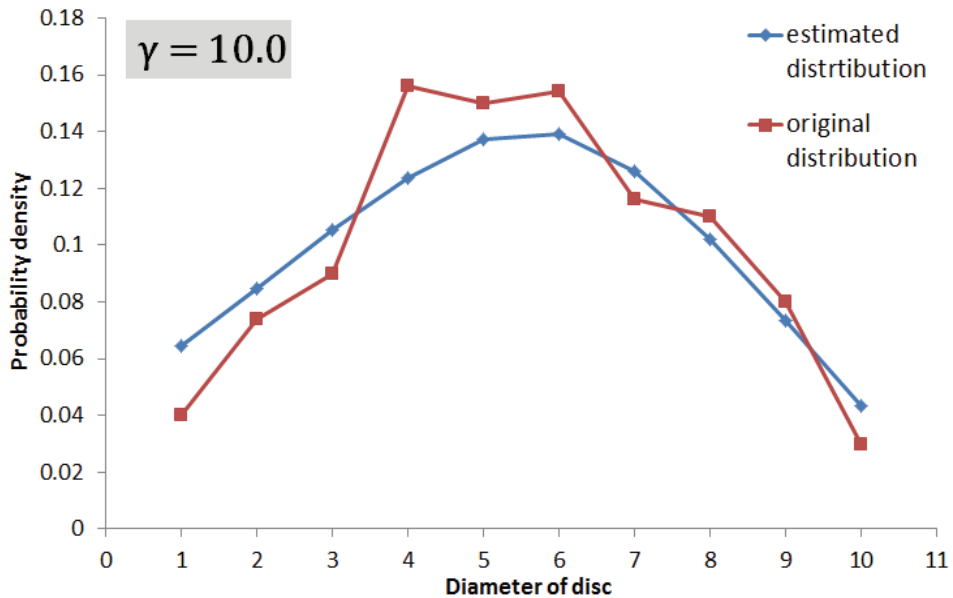


Figure 15. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 14.80 (%))

이번에는 양끝내포선의 개수가 3600개 내외일 때, $L_{\max} = 30$, $S_{\max} = 10$, $I = 30$, $J = 10$ 으로 구한 *JCV* 행렬을 이용하여 추정한 결과이다. 하나의 조사창에 양끝내포선이 3600개가 관측되는 것은 현실적으로 보았을 때 개수가 과도하나, 본 절에서는 실용성을 잠시 차치하고 각 변수의 변화가 결과에 미치는 영향을 알아보려고 하였으므로, 표본의 개수를 크게 증가시켜 추정해 보았다. γ 값의 변화에 따른 오차의 변화를 아래 **Figure 16** 과 같이 그래프로 나타내었다. 이 경우에는 평균적으로 $\gamma = 2.0$ 내외에서 가장 작은 추정오차를 보였다.

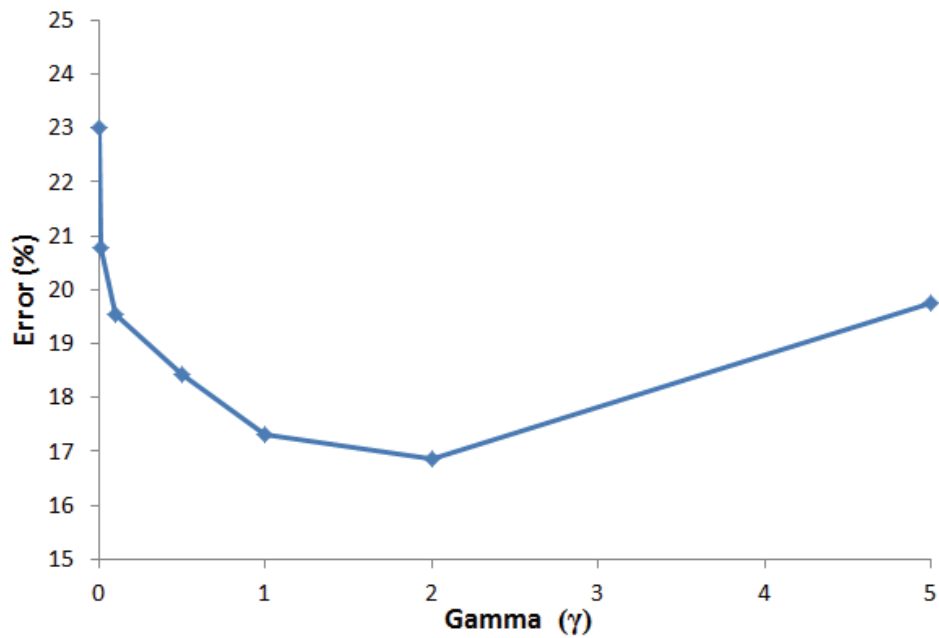


Figure 16. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 (양끝내포선이 3600개인 경우)

Table 6. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 (양끝내포선이 3600개인 경우)

Gamma (γ)	0	0.01	0.1	0.5
오차 (%)	23.016	20.778	19.546	18.425
Gamma (γ)	1.0	2.0	5.0	10.0
오차 (%)	17.306	16.868	19.748	24.063

표본의 개수가 더 많아지면, 모분포는 초기에 가정한 정규분포의 모양과 흡사해지므로 분포함수 곡선이 비교적 요철이 없이 매끄러운 양상을 보인다. 그러므로 곡선을 매끄럽게 하는 변수인 γ 가 그리 크지 않은 값에서도 최소 오차를 만족시킬 수 있는 것으로 보인다.

동일한 조건에서 10회 수행한 몬테카를로 시뮬레이션 중 하나의 케이스에 대하여, 추정분포와 모분포의 비교 그래프를 γ 의 변화에 따라 순차적으로 나열하면 아래 그림들과 같다. 추정분포와 모분포의 확률밀도함수 차이를 오차(Error)(%)로 계산하여 각 그림의 설명에 기재하였다.

표본의 개수가 전보다 증가하였으므로, 모분포(그래프의 original distribution)도 전보다 더 정규분포에 가까운 매끄러운 곡선으로 나타났다. $\gamma=0.0$ 일 때는 추정분포가 상하로 지그재그 모양의 진동(oscillation)을 보이며 가장 큰 오차를 보였다. γ 값을 점점 증가시키면 추정분포의 진동이 점차 완화된 그래프에서 순차적으로 확인할 수 있다. 또한 추정분포의 모양이 모분포의 모양과 흡사해지면서 오차도 점점 감소한다. $\gamma=2.0$ 일 때 가장 낮은 오차 수준인 14.24 %를 보였다. γ 값이 이보다 커지면 추정분포의 곡선이 더욱 완만해지면서 오히려 모분포와의 차이가 더 커지는 것도 확인할 수 있다.

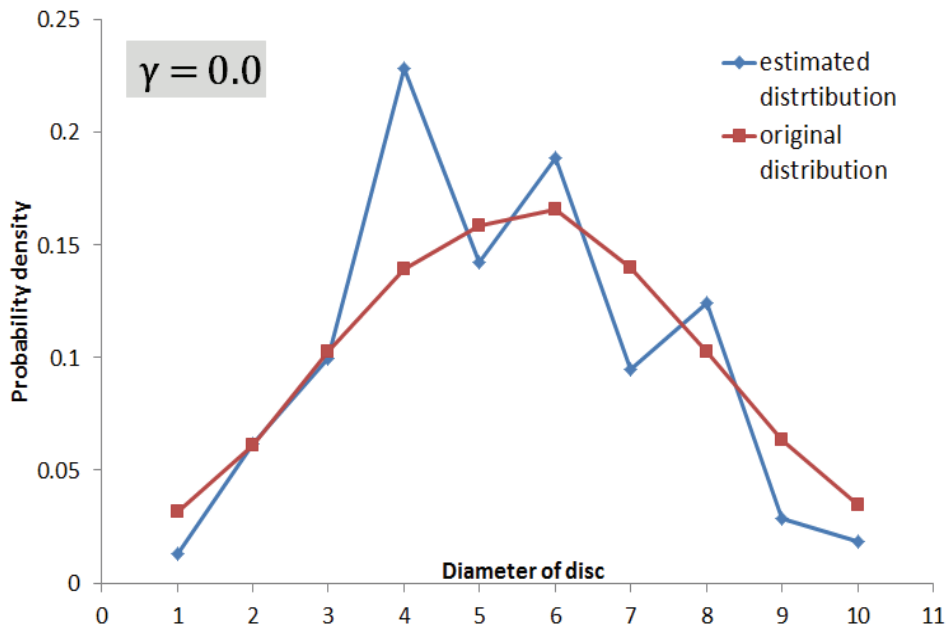


Figure 17. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 27.02 (%))

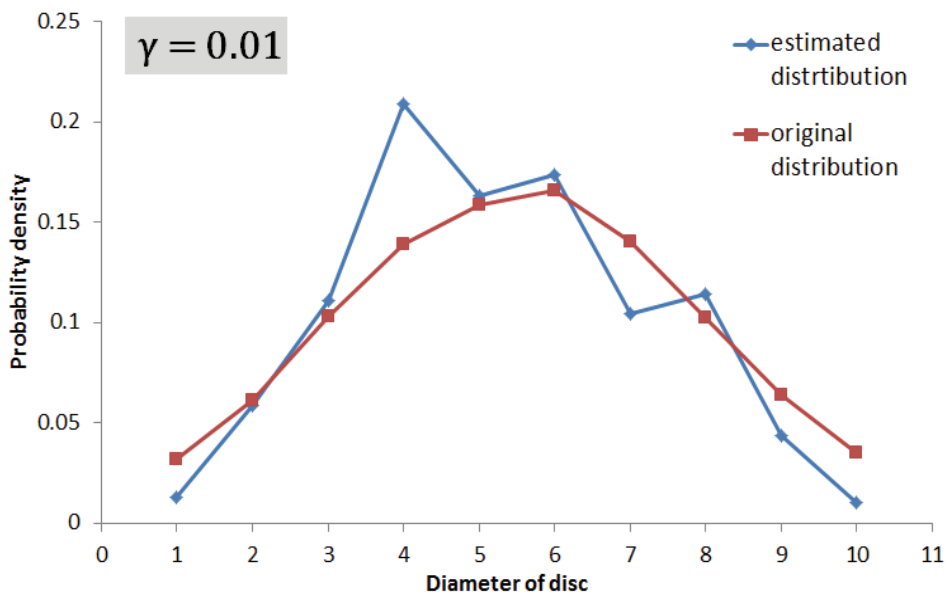


Figure 18. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 20.46 (%))

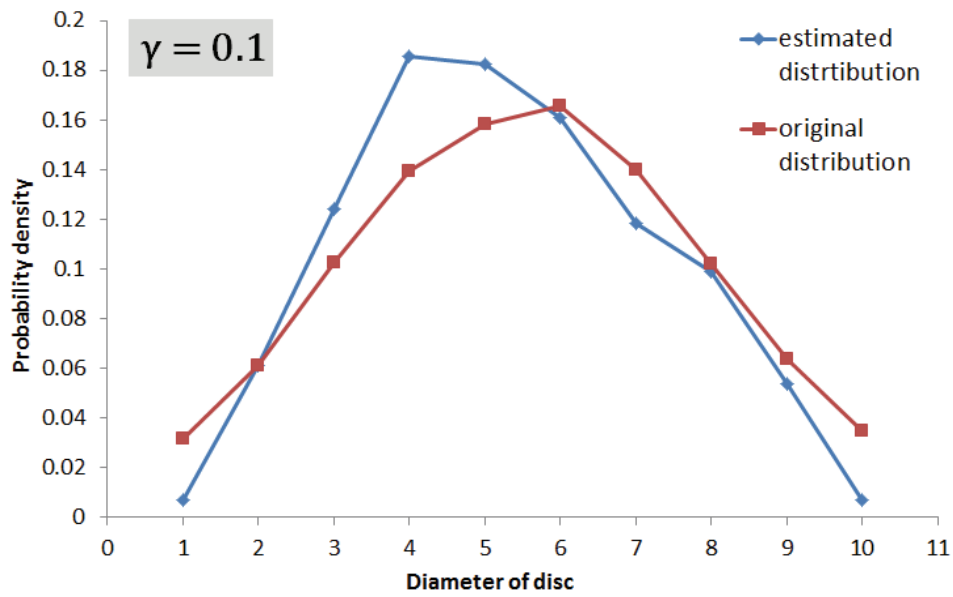


Figure 19. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 18.35 (%))

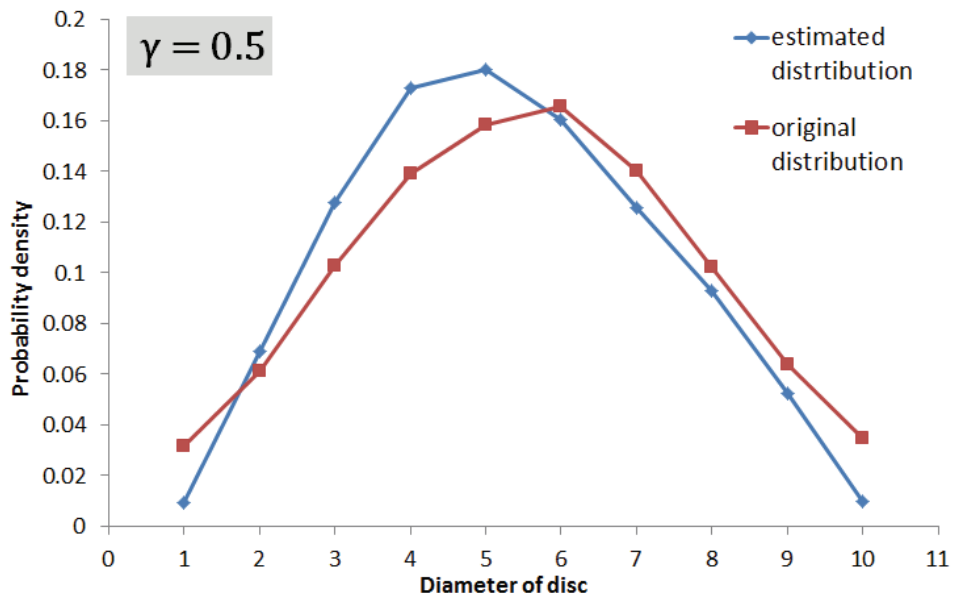


Figure 20. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 17.57 (%))

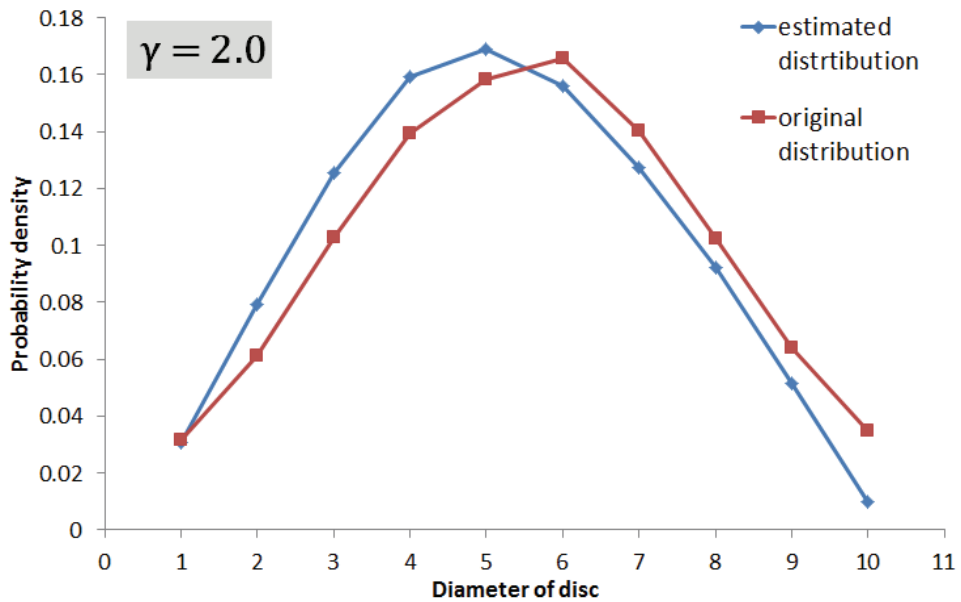


Figure 21. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 14.24 (%))

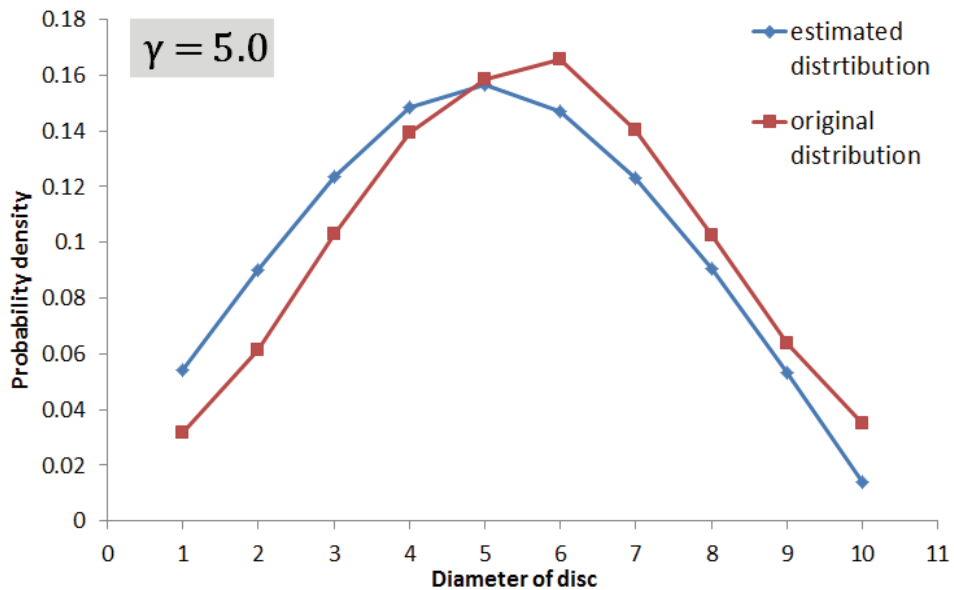


Figure 22. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 16.21 (%))

4.5 I (절리선 길이의 구간의 개수)에 따른 오차 변화

$L_{\max} = 30$, $S_{\max} = 10$, $J = 10$ 으로 고정하였으며, 절리선 길이 구간 개수인 I 를 다르게 해보았다. I 가 달라짐에 따라 절리선 길이 구간 간격인 dl 의 값이 달라진다. 아래 **Figure 23**, **Table 7** 은 각각 $I = 27, 28, 29, 30, 31, 32$ 일 때 γ 값의 변화에 따른 오차 변동을 나타낸 결과이다.

γ 가 0에서부터 증가함에 따라 초반에는 오차가 급격히 감소하다 특정 시점에서 최소 오차를 기록하고 다시 오차가 증가하는 양상은 모든 I 의 경우에 비슷하게 나타났다. 그러나 I 와 γ 값에 따른 오차 값과, 최소 오차를 나타내는 γ 값은 조금씩 다르게 나타났다. I 가 변하면 추정 결과에 차이가 있음을 확인했으나 특별히 눈에 띄는 경향성은 찾기 어려웠다.

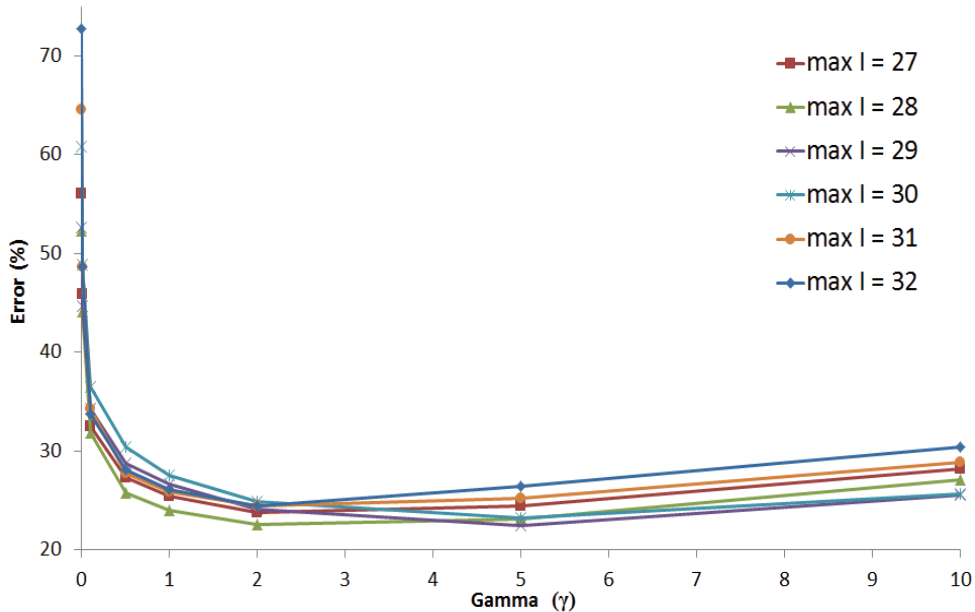


Figure 23. 절리선구간의 개수(I)와 Gamma(γ)의 변화에 따른 오차의 변화

Table 7. 절리선구간의 개수(J)와 Gamma(γ)의 변화에 따른 오차의 변화

γ	I = 27 $dl=1.111$	I = 28 $dl=1.071$	I = 29 $dl=1.034$	I = 30 $dl=1.0$	I = 31 $dl=0.968$	I = 32 $dl=0.938$
0	56.0882	52.308	52.598	60.743	64.53	72.694
0.01	45.859	44.131	44.632	48.894	48.679	48.619
0.1	32.484	31.791	34.227	36.481	34.278	33.667
0.5	27.251	25.81	28.707	30.404	27.77	28.065
1	25.38	23.966	26.605	27.532	25.816	26.079
2	23.775	22.512	24.151	24.92	24.471	24.45
5	24.484	23.064	22.426	23.238	25.183	26.406
10	28.203	27.098	25.551	25.606	28.803	30.384

4.6 J (절리원판 직경의 구간의 개수)에 따른 오차 변화

이번에는 $L_{\max} = 30$, $S_{\max} = 10$, $I = 30$ 으로 고정하였으며, 절리선 길이 구간 개수인 J 를 다르게 해보았다. J 가 달라짐에 따라 ds 의 값이 달라진다. 아래 **Figure 24**, **Table 8** 은 각각 $J = 8, 9, 10, 11, 12$ 일 때 γ 값의 변화에 따른 오차 변동을 나타낸 결과이다.

γ 가 0에서부터 증가함에 따라 초반에는 오차가 급격히 감소하다 특정 시점에서 최소 오차를 기록하고 다시 오차가 증가하는 양상은 모든 J 의 경우에 비슷하게 나타났다. 그러나 J 와 γ 값에 따른 오차 값과, 최소 오차를 나타내는 γ 값은 조금씩 다르게 나타났다. J 가 변하면 추정 결과에 차이가 있음을 확인했으나 특별히 눈에 띄는 경향성은 찾기 어려웠다.

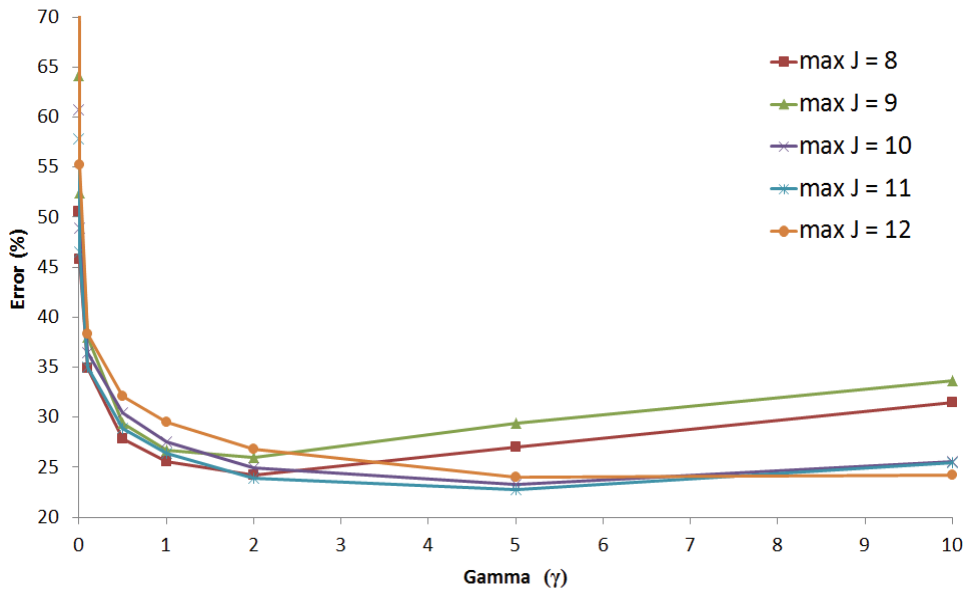


Figure 24. 절리 직경 구간의 개수(J)와 Gamma(γ)의 변화에 따른 오차의 변화

Table 8. 절리 직경 구간의 개수(J)와 Gamma(γ)의 변화에 따른 오차의 변화

γ	$J = 8$ $ds=1.25$	$J = 9$ $ds=1.11$	$J = 10$ $ds=1.0$	$J = 11$ $ds=0.91$	$J = 12$ $ds=0.83$
0	50.519	64.168	60.743	57.783	170.41
0.01	45.753	52.471	48.894	46.5312	55.289
0.1	34.919	37.995	36.481	35.033	38.329
0.5	27.852	29.445	30.404	28.919	32.145
1	25.5404	26.75	27.532	26.435	29.485
2	24.187	26.008	24.92	23.919	26.818
5	27.032	29.4	23.238	22.77	24.037
10	31.504	33.711	25.606	25.415	24.195

4.7 $ds = dl = 0.5$ 인 경우의 오차 변화 결과

이번에는 $L_{\max} = 30$, $S_{\max} = 10$ 이고 $I = 60$, $J = 20$ 으로 하여, 절리길이의 구간 크기(dl)과 절리 직경의 구간 크기(ds)이 각각 $ds = dl = 0.5$ 인 경우로 추정해보았다. 추정에 사용된 절리의 개수는 변함없이 180 개 내외이다.

위에서 나타난 결과 4.4 은 구간 간격이 $ds = dl = 1.0$ 인 경우였고, 이번에는 구간 간격만 반으로 줄여 추정해본 것이다.

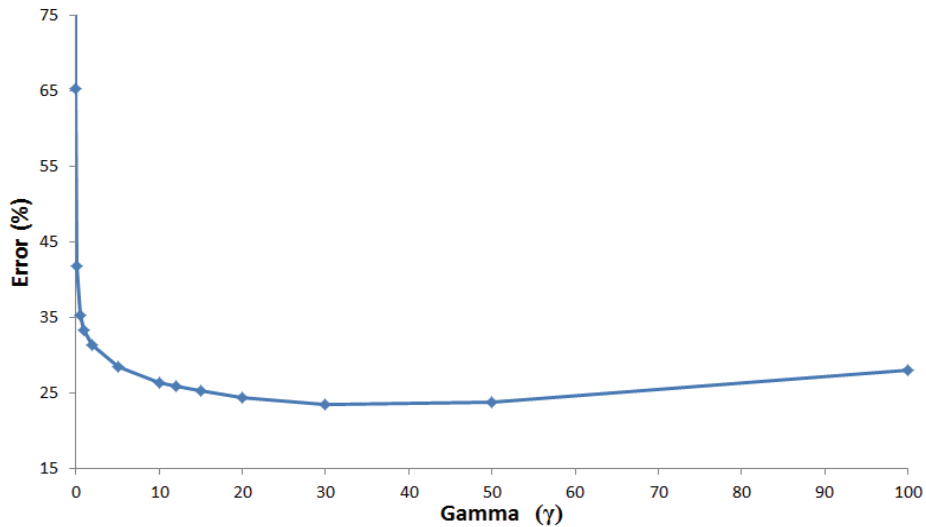


Figure 25. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 ($ds = dl = 0.5$ 인 경우)

Table 9. Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화 ($ds = dl = 0.5$ 인 경우)

Gamma (γ)	0	0.01	0.1	0.5
오차 (%)	134.73	65.298	41.892	35.272
Gamma (γ)	1.0	5.0	10.0	20.0
오차 (%)	33.414	28.443	26.424	24.48
Gamma (γ)	30.0	50.0	100.0	-
오차 (%)	23.594	23.86	27.999	-

앞서 $ds = dl = 1.0$ 로 설정한 경우에는 $\gamma = 5.0$ 인 이외에서 가장 낮은 추정오차를 보였는데, $ds = dl = 0.5$ 로 구간 간격이 줄어든 경우에는 보다 큰 γ 값인 $\gamma = 30$ 이외에서 대개 최소 오차를 갖는 것으로 나타났다.

결과 4.4에서 사용한 것과 동일한 모분포 자료로부터 얻은 추정 결과가 아래 그림과 같다. $\gamma = 0.0$ 인 경우의 그래프에서 볼 수 있듯이, 구간의 개수가 많으면 상하 진동의 빈도가 더욱 심해지면서 더 큰 오차를 나타낸다. 진동이 심한 만큼, 이를 완화하기 위한 γ 값이 더욱 커져야 했던 것으로 보인다.

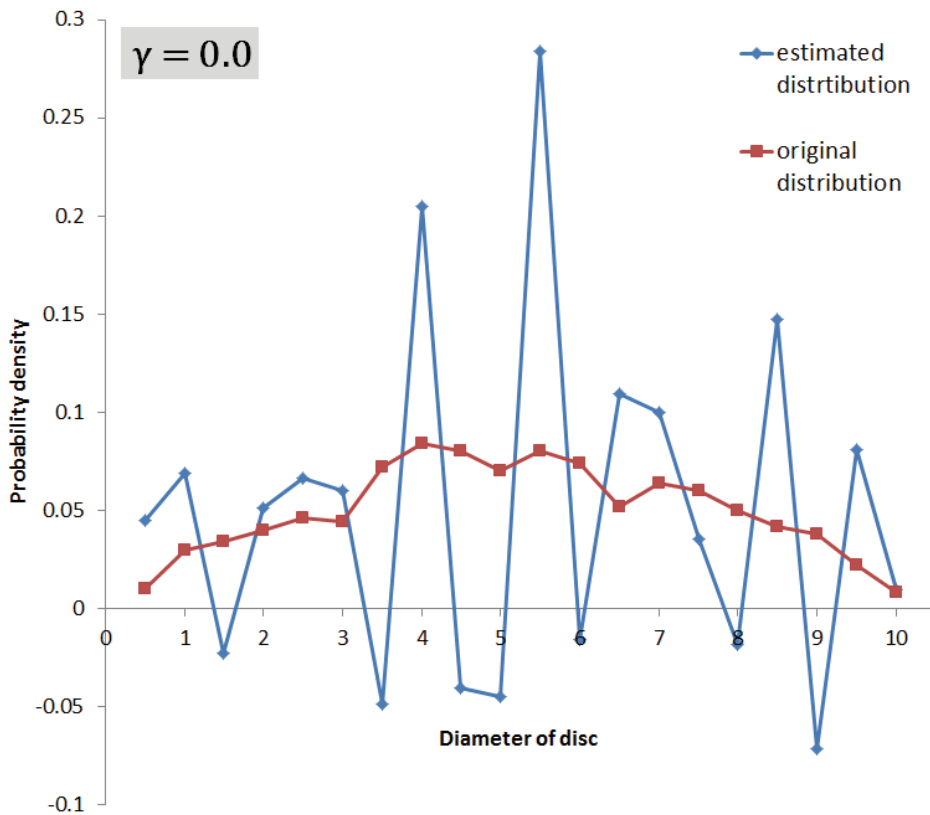


Figure 26. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 141.2 (%))

이 케이스에서 가장 낮은 추정오차를 나타낸 γ 값은 30 이었다. $\gamma=30$ 일 때 추정 결과는 아래 그래프와 같다.

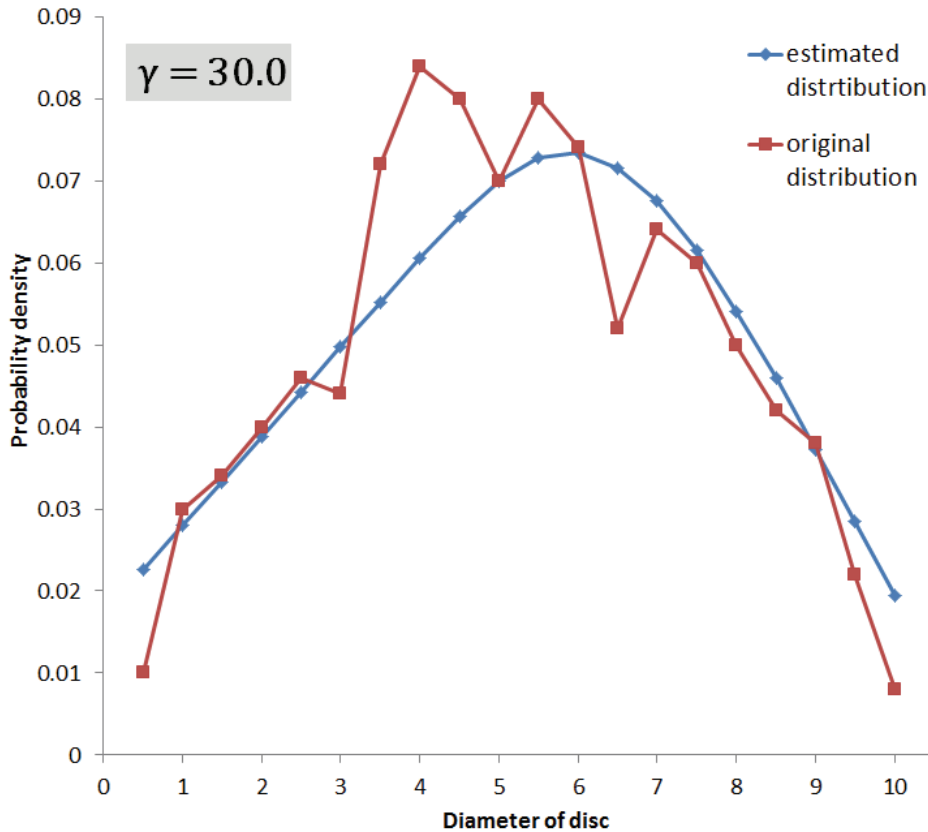


Figure 27. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 13.78 (%))

아래 그림은, 서로 다른 세 가지 모분포를 가지고 추정한 결과이다. 각 케이스별로 가장 오차가 낮은 경우의 γ 값과 그 때의 오차를 함께 나타내었다.

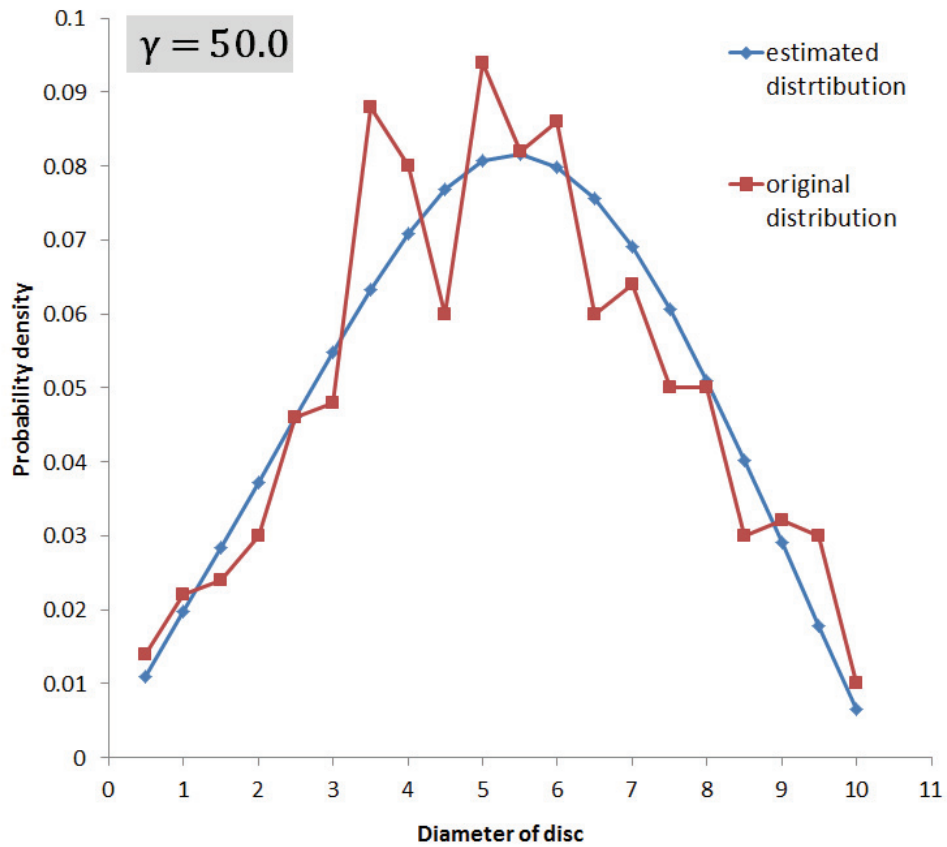


Figure 28. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 15.54 (%))

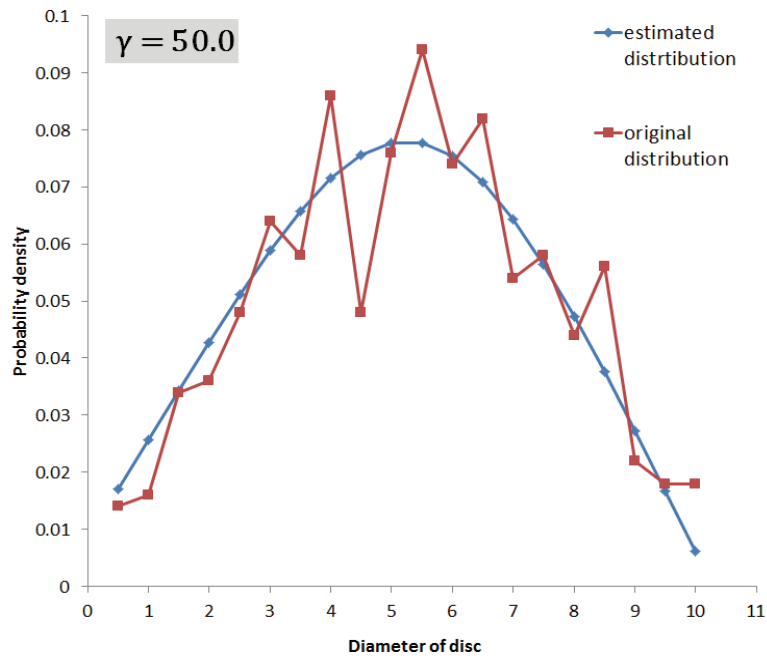


Figure 29. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 16.04 (%))

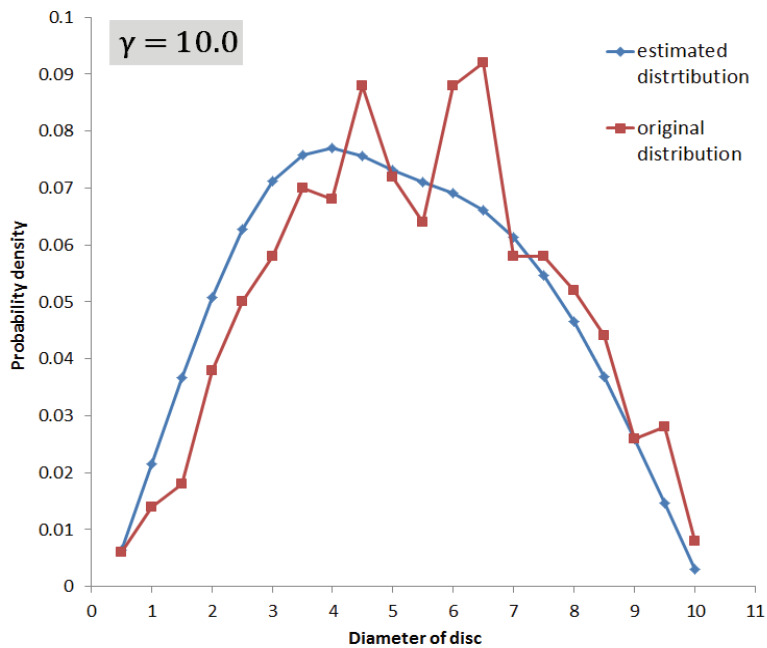


Figure 30. 모분포와 추정분포의 비교 (Error = 18.31 (%))

4.8 절리직경 모분포의 평균의 변화에 따른 오차 변화

몬테-카를로 시뮬레이션 과정에서 절리 직경은 임의의 정규분포를 따르도록 난수를 발생시켜 정한다. 이 절리직경 분포의 표준편차는 2.5 m로 고정시키고, 평균을 증가시켰을 때 추정 오차의 변화는 아래 **Figure 28, Table 10** 과 같다. 분포의 평균을 증가시키면 추정 오차는 비교적 높은 값으로 나타난다. 이는 절리군의 직경이 대체로 작은 구간에서의 추정이 더 낮은 오차로 이루어지는 것으로 볼 수 있다.

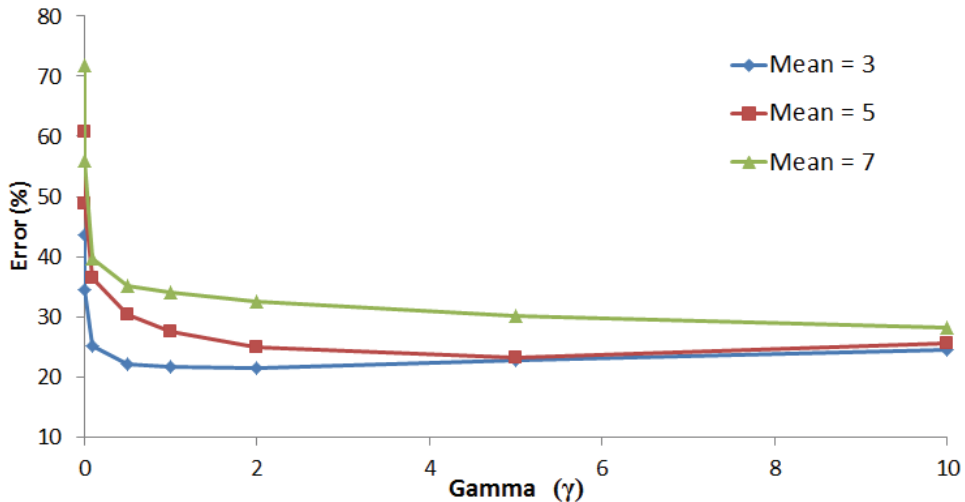


Figure 31. 정규분포 평균과 Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화

Table 10. 정규분포 평균과 Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화

Mean	S.D.	$\gamma=0$	$\gamma=0.01$	$\gamma=0.1$	$\gamma=0.5$	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=5$	$\gamma=10$
3	2.5	43.638	34.475	25.169	22.104	21.597	21.443	22.708	24.376
5	2.5	60.743	48.894	36.481	30.404	27.532	24.92	23.238	25.606
7	2.5	71.927	56.026	39.738	35.082	33.984	32.508	30.13	28.239

4.9 절리직경 모분포의 표준편차의 변화에 따른 오차 변화

이번에는 절리직경 분포의 평균을 5 m로 고정시키고, 표준편차를 증가시켰을 때 추정 오차의 변화를 살펴보았다. 결과는 아래 **Figure 29, Table 11** 과 같다. γ 값이 0 이거나 아주 작은 수준에서는 특별한 경향성을 보이지 않다가, γ 가 일정 수준 이상인 경우 분포의 표준편차가 낮아지면 오차는 비교적 높은 값을 보인다. 표준편차가 작으면 분포의 모양이 뾰족한 형태이고, γ 값이 클수록 추정분포의 모양은 납작한 형태가 되기 때문에 오차가 커지는 것으로 보인다. 즉, 추정하고자 하는 분포의 표준편차가 작을 경우에는 γ 의 효과가 잘 나타나기 어렵다는 것을 알 수 있다.

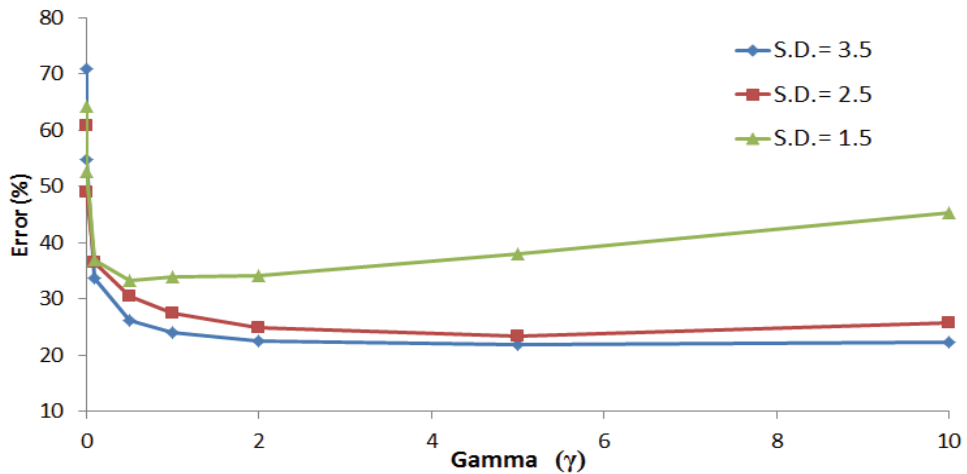


Figure 32. 정규분포 표준편차와 Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화

Table 11. 정규분포 표준편차와 Gamma (γ)의 변화에 따른 오차의 변화

Mean	S.D.	$\gamma=0$	$\gamma=0.01$	$\gamma=0.1$	$\gamma=0.5$	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=5$	$\gamma=10$
5	3.5	70.858	54.706	33.745	26.152	24.006	22.547	21.76	22.222
5	2.5	60.743	48.894	36.481	30.404	27.532	24.92	23.238	25.606
5	1.5	64.315	52.686	36.992	33.160	33.811	34.156	38.071	45.192

4.10 적정 γ 의 선택 방안

지금까지 다양한 조건 하에서 γ 값의 변화에 따른 모분포와 추정분포 간의 오차 변화를 살펴보았다. 그러나 몬테-카를로 시뮬레이션을 통해서 얻는 절리크기의 모분포는 기지의 함수인 것에 반해, 현장조사에서는 실제의 모분포는 미지의 함수이므로 모분포와 추정분포 간의 실제 오차는 알 수 없는 값이다. 그러므로 현장조사에 적용할 시, 실제 오차가 최소가 되는 최적의 γ 값을 결정하기 위해서는 별도의 적절한 가이드라인이 필요하다.

앞서 3.4에서 기술하였듯이, c_j 를 구하기 위하여 최소화시킬 식 E 는 식 (19)과 같았다. 그리고 임의의 γ 값을 선택한 뒤 식 (24)을 풀어 c_j 를 얻을 수 있었다. 그 c_j 를 가지고 아래 식 (26)과 같은 오차 값을 구할 수 있다. 식 (26)은 우리가 c_j 를 얻기 위해 최소화시킨 식 (19)에 기반하고 있으며, 식 (27)과 식 (28)의 두 항의 합으로 이루어져 있다.

$$Error = \sum_{i=2}^{N-1} \left(\frac{c_{i-1} - 2c_i + c_{i+1}}{ds} \right)^2 + K \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 \quad \text{식 (26)}$$

$$Error_1 = \sum_{i=2}^{N-1} \left(\frac{c_{i-1} - 2c_i + c_{i+1}}{ds} \right)^2 \quad \text{식 (27)}$$

$$Error_2 = K \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 \quad \text{식 (28)}$$

식 (27)은 함수의 2계 도함수 값의 합으로, 함수의 진동이 얼마나 심한지에 대한 정도를 나타낸다. 그리고 식 (28)은 현장조사 데이터와 이론계산 데이터와의 차이로, 이론적 관계식에 얼마나 충실하게 해를 구했는지에 대한 척도이다. 이 두 항은 서로 다른 종류인 항이므로, 두 항을 바로 더하는 것이 아니라 어느 한쪽에 상수 K 를 곱한 뒤에 더하도록 하였다.

특정한 케이스에 대하여 실제 오차와 식 (26)의 오차를 구하고 비교해보았

다. 이때 상수 K 는 1로 하였다. 아래 Figure 30은 γ 의 변화에 따른 각 오차의 변화를 그린 그래프이다.

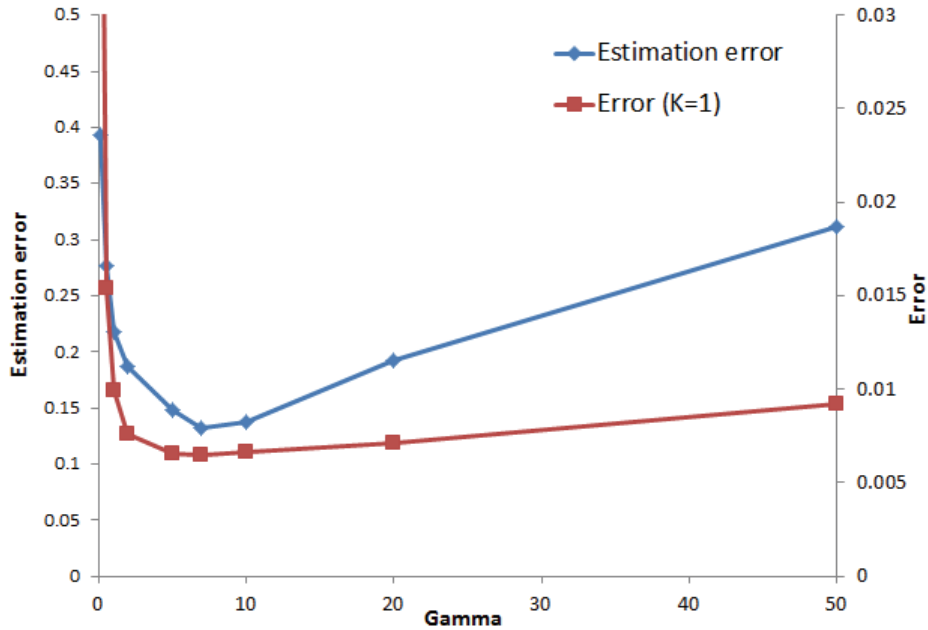


Figure 33. 실제 오차와 계산 오차($K=1$)의 Gamma(γ) 값에 따른 변화

식 (26)으로 계산한 오차(그래프에서 Error($K=1$))도 실제 오차(그래프에서 Estimation error)의 거동과 마찬가지로, $\gamma=0$ 일 때 오차가 매우 높고, 조금씩 커지면 오차가 급격히 줄어들며, 특정 γ 에서 최소값을 보이고, 그보다 γ 가 증가하면 다시 오차도 증가한다. 실제 오차가 최소일 때의 γ 값과, 식 (26)으로 계산한 오차가 최소일 때의 γ 값이 7로 동일하였다. 즉, 이 경우에는 계산 오차가 최소일 때의 γ 값으로 구한 c_j 는, 실제 오차가 최소가 되는 최적의 추정분포라고 볼 수 있다.

그러나 $K=1$ 로 하였을 때, 모든 경우에 실제 오차가 최소일 때의 γ 값과 계산 오차가 최소일 때의 γ 값이 항상 같은 것은 아니었다. 아래 Figure

31은 또 다른 케이스에서의 오차 그래프로, $K=1$ 일 때가 아니라 $K=3$ 일 때 실제 오차와 거동이 비슷하였다. 실제 오차와 동일한 최적 γ 값을 나타낼 때의 상수 K 을 결정하는 뚜렷한 방안은 찾지 못하였다. 다만 $K=1$ 일 때, 실제 오차가 최소인 γ 가 정확하게 일치하는 것이 아닐 뿐이지, 동떨어지게 차이가 있는 것은 아니었다. 즉 $K=1$ 일 때, 정확한 최적의 γ 는 찾기 어렵더라도 대략적인 γ 값의 범위는 정할 수 있는 가이드라인이 될 수 있을 것으로 보인다.

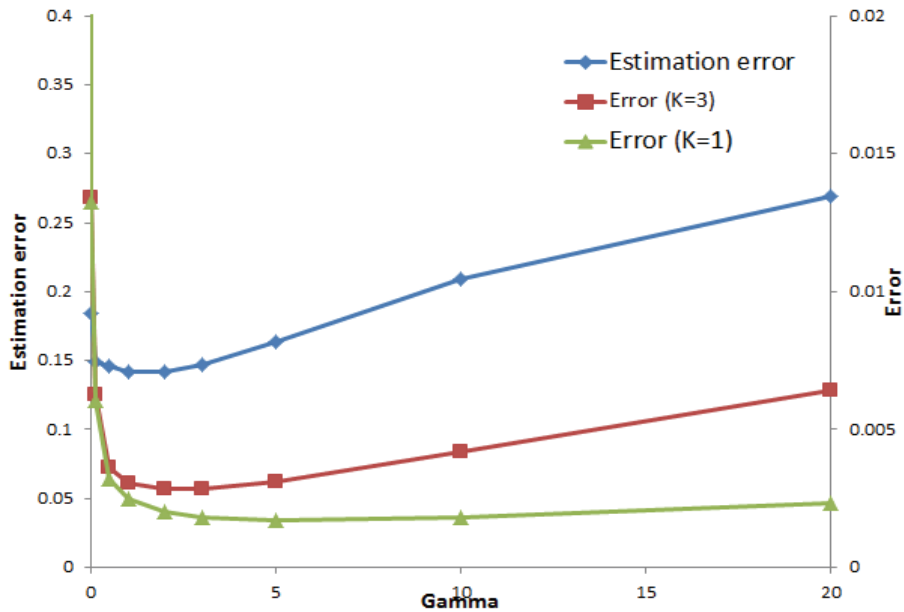


Figure 34. 실제 오차와 계산 오차($K=1$, $K=3$)의 Gamma(γ) 값에 따른 변화

따라서 적정 γ 값을 찾기 위하여 다음과 같은 알고리즘을 따를 수 있다. 먼저 γ 값이 0일 때를 시작으로 하여 c_j 를 구하고 $K=1$ 인 식 (26)의 오차를 구한다. 다음으로 조금 더 증가시킨 γ 값에서 오차를 구하고, 앞 단계의 γ 에서의 오차와 비교한다. 이 과정을 반복하며 오차가 상당히 줄어들었을 때의 γ 의 범위 및 c_j 를 찾을 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 3차원 원통형 조사창에서의 양끝내포선 길이 분포를 이용하여 절리 직경 분포를 추정함에 있어서, 기존 연구의 원리를 적용하여 추정을 수행하였다. 기존의 평면 조사창 조사에서와 달리, 원통형 조사창의 JCV는 전수조사기법으로 구하였다. 추정법의 검증을 위하여, 몬테-카를로 시뮬레이션을 통해 가상의 절리 분포를 발생시키고 모분포와 추정분포를 비교하였다.

또한 오차를 줄일 수 있는 개선된 방안을 제시하였다. 이는 추정 오차를 줄이는 방안으로, 수치적 계산 결과의 원치 않는 진동(oscillation)을 감쇄시키기 위하여 계산 과정에 보조변수 γ 를 도입하였다. 0 보다 큰 γ 는 수치해의 진동을 줄여주는 효과가 있었으며, 더불어 추정오차가 감소함을 확인하였다. 다만 γ 가 특정 값보다 더 커지면, 추정분포의 모양이 평퍼짐해지면서 오히려 본래 분포와의 차이가 증가하게 된다.

본래 물리적 현상은 그 양상 및 거동이 들쭉날쭉하지 않고 매끄러운 편이기 때문에, 진동이 줄어든 해는 자연스러운 것으로 볼 수 있다. 본 연구에서는 추정법의 검증을 위한 모분포로서 정규분포를 사용하였는데, 균일분포나 대수정규분포 등 다른 매끄러운 분포를 사용하여도 역시 양호한 추정 결과를 얻을 수 있을 것으로 보인다.

방정식 $\sum_j a_{ij}c_j = b_i$ 의 해 c_j 에 나타나는 오차는, 사용된 a_{ij} 가 내포하고 있는 오차로부터 기인한 것일 수도 있고, b_i 가 내포한 오차로부터 기인한 것일 수도 있다. 즉 $JCV(i, j)$ 와 N'_i 의 변화에 따라 추정오차는 달라진다. $JCV(i, j)$ 는 S_{\max} , L_{\max} , I , J , dl , ds (Table 1 참조)에 따라 달라지고, N'_i 는 표본의 개수, 모분포의 평균, 모분포의 표준편차에 따라 달라진다. 본 연구에서는 이러한 각각의 변수별로 추정결과에 미치는 영향도 알아보았다.

오차가 최소가 되는 최적의 γ 값은 $\gamma=0.0$ 에서부터 조금씩 증가시켜가며

시행착오법으로 찾을 수 있다. 마찬가지로 방식으로 I, J, S_{\max} 의 최적값도 찾을 수 있을 것이다. 단, 본 연구에서의 오차 계산 방식으로 얻는 실제 오차를 이용할 수는 없다. 왜냐하면 실제로 모분포는 미지의 것이기 때문이다. 본 연구에서는 단지 각 변수의 변화에 따라 추정 오차가 어떻게 변하는지 그 영향을 분석하기 위하여, 변수를 조금씩 변화시켜가며 실제 모분포와 추정분포와의 차이를 오차로 이용한 것이다. 최적화된 변수 γ, I, J, S_{\max} 등의 값을 찾기 위해서는 다른 가이드라인이 필요하며, 이를 위한 비교 지표 4.10에서 추가적으로 제시하였다. 즉 식 (26)의 *Error*를 이용한 시행착오법을 통하여 오차가 낮은 적정 γ 구간을 찾을 수 있다. 이로써 기존 방법보다 오차가 훨씬 감소한, 실제 모분포와 가까운 직경분포를 추정할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Villaaescusa, E. and E. T. Brown, 1992, Maximum likelihood estimation of joint size from trace length measurements, Rock Mech. Rock Eng. Vol. 25, 67-87.
2. Priest, S. D., 1993, Discontinuity analysis for rock engineering, Chapman & Hall., London.
3. Kulatilake, P. H. S. W. and T. H. Wu, 1986, Relation between discontinuity size and trace length., Proc. 27th U.S. Symposium on Rock Mechanics, Tuscaloosa, Alabama, 130-133.
4. Baecher, G. B., H. H. Einstein and N. A. Lanney, 1977, Statistical description of rock properties and sampling, 18th U.S. Symposium on Rock Mechanics, 1-8.
5. Zhang, L. and H. H. Einstein, 1998, Estimating the mean trace length of rock discontinuities, Rock Mechanics and Rock Engineering, 31. 4, 217-235.
6. Tonon, F. and S. Chen, 2007, Closed-form and numerical solutions for the probability distribution function of fracture diameter, International Journal of Rock Mechanics & Mining Science, Vol. 44, 332-350.
7. Song, J. J. and C. I. Lee, 2001, Estimation of joint length distribution using window sampling, International Journal of Rock Mechanics &

Mining Science, Vol. 38, 519–528.

8. Song, J. J., 2005, A study of estimation of diameter distribution and volumetric frequency of joint discs using the least square method, Tunnel and Underground Space, Vol. 15, No. 2, 137–144.
9. Song, J. J., 2009, Distribution-free method for estimating size distribution and volumetric frequency of rock joints, Int. J. Rock Mech. & Min. Sci., Vol. 46, 748–760.
10. Jeon, K., J. J. Song and Y.D. Jo, 2011, A study for the estimation of joint diameter distribution using the trace length distribution from cylindrical window survey, Tunnel and Underground Space, Vol. 21, No. 5, 386–393.
11. Strand, O. N. and E. R. Westwater, 1968, Statistical estimation of the numerical solution of a Fredholm integral equation of the first kind, J. Assoc. Comput. Machinery, Vol. 15, 1, 100–114.
12. Phillips, D. L., 1962, A Technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, J. Assoc. Comput. Machinery, Vol. 9, 84–97.
13. Twomey, S., 1963, On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature, J. Assoc. Comput. Machinery, Vol. 10, 97–101.
14. Twomey, S., 1965, The application of numerical filtering to the solution

of integral equations encountered in redirect sensing measurements, J. Franklin Inst. Tech., 279, 2, 95–109.

15. Vemuri, V., and P. Fang, 1974, On solving Fredholm integral equations of the first kind, J. Frankhn Inst. Tech., 297, 3, 187–200.
16. Adamiak. K., 1981, On Fredholm Integral Equations of the First Kind Occurring in Synthesis of Electromagnetic Fields, Intern. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, 1187–1200.
17. Bautu, E. and E. Pelican, 2007, Numerical solution for Fredholm first kind integral equations occuring in synthesis of electromagnetic fields, General Physics, Romanian Journal of Physics, 52(3/4), 245.
18. Sahasrabudhe, S.C. and A.D. Kulkarni, 1977, On solving Fredholm integral equations of the first kind, J. Assoc. Comput. Machinery, 24(4), 624–629.

Abstract

Estimation of Joint Size Distribution Using a Contained Trace Length Distribution in a Cylindrical Window

Ga Hyun Suh

Department of Energy Systems Engineering

The Graduate School

Seoul National University

Estimation of rock joint size distribution is important to analyze rock block stability for underground structure. Joint size distribution is generally estimated by statistical method using field data of trace length obtained by sampling window survey. A method for estimating rock joint size distribution using contained traces length distribution from 3D cylindrical window survey was suggested. To reduce the numerical error, improved technique which has been applied to solving the Fredholm integral equation of the 1st kind was applied. The accuracy was verified by referring to Monte-Carlo simulation. It was found that the error can be decreased with suitable gamma values. Also, we could see that non-zero gamma value causes the smoothing effect on the oscillatory numerical solution.

keywords: joint size distribution, cylindrical window survey, contained trace, Fredholm integral equation of the 1st kind, Monte-Carlo simulation

Student Number: 2012-21002